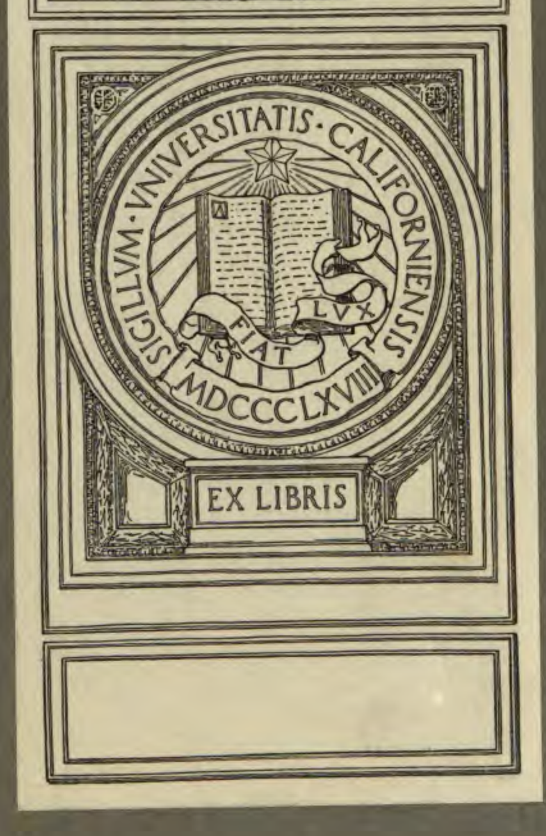

UC-NRLF
$B 76 059


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
FIAT LVX
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

PRINCIPES

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

DEUXIÈME PARTIE

DU

COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Professé à l'Université de Liége

PAR

V. DWELSHAUVERS-DERY

LIÉGE

IMPRIMERIE DE CH. AUG. DESOER, LIBRAIRE

1884

A Mr George Davidson
hommage et souvenir de
V. Dwelshauvers. De

PRINCIPES

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

DEUXIÈME PARTIE

DU

COURS DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Professé à l'Université de Liége

PAR

V. DWELSHAUVERS-DERY

LIÉGE
IMPRIMERIE DE CH. AUG. DESOER, LIBRAIRE
—
1884

Davidson Bookplate

AVANT-PROPOS.

Au risque d'être banal, je dirai la vérité : c'est à la sollicitation de nombre de personnes intéressées à la question que je me suis décidé à publier une seconde édition des *Principes de la résistance des matériaux*. Je n'ai rien changé au but de l'ouvrage : démontrer les formules fondamentales que Reuleaux met en œuvre dans son *Constructeur*. Mais j'ai comblé diverses lacunes qui m'ont été signalées par mes lecteurs, notamment en ce qui concerne les enveloppes soumises à une forte pression à l'extérieur, les pièces droites reposant sur plus de deux appuis, le solide d'égale résistance pour une pièce pressée par ses abouts, la flexion des pièces courbes et la théorie des ressorts. J'ai ajouté en notes le calcul des courroies eu égard à la vitesse et celui des tourillons eu égard aussi à la vitesse et à la pression par unité de surface ; la méthode employée, que je crois nouvelle, conduit à des résultats conformes à la pratique.

Mon but sera atteint si j'ai réussi à être utile aux constructeurs et à mes élèves.

V. DWELSHAUVERS-DERY.

Liége, 1883.

PRINCIPES

DE LA

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX SOLIDES

PRÉLIMINAIRES.

Rappel des principes de statique concernant la composition des forces.

1. De même que l'idée d'un point matériel est purement abstraite, de même l'idée d'un effort s'exerçant en un point d'un corps est une pure abstraction. Considérant la matière comme dépourvue de la capacité de se mouvoir par elle-même, on est conduit à supposer que tout corps en mouvement est ou a été sollicité par des forces extérieures.

Quand un corps possède un mouvement de translation simple, on suppose que ce mouvement est ou a été communiqué par un faisceau d'efforts composants, en nombre égal à celui des points matériels indéfiniment petits qui composent le corps, et s'exerçant dans des conditions telles que tous les points aient à chaque instant identiquement la même vitesse dans la même direction et dans le même sens.

Par une nouvelle abstraction, au faisceau d'efforts en nombre indéfini s'exerçant sur les points d'un corps dans les conditions susdites, on a substitué un effort unique qui serait capable de produire le même effet sur une même masse réduite à un point.

2. Un tel effort, d'après les effets qu'on lui suppose, est complètement déterminé par quatre éléments idéaux : 1° *Son point d'application;* 2° *sa direction*, qui est celle du mouvement rectiligne qu'il donne au point d'application ; 3° *son sens*, celui de ce même mouvement; 4° *son intensité*.

Ces quatre éléments peuvent être représentés graphiquement par une portion de droite dont 1° le point de départ coïnciderait avec le point d'application de l'effort ; 2° dont la direction serait celle de l'effort; 3° dont le sens, indiqué par une flèche, serait celui du même effort; 4° enfin dont la longueur, mesurée au moyen d'une unité de convention, compterait autant de fois cette unité qu'il y a de kilogrammes dans l'expression de l'intensité de l'effort.

Ces quatre éléments peuvent être représentés analytiquement par : 1° les coordonnées du point d'application ; 2° les angles ou les cosinus des angles que la direction de l'effort fait avec les axes des coordonnées ; 3° le signe; 4° l'intensité exprimée par un nombre de kilogrammes.

3. La substitution abstraite d'un seul effort à un faisceau d'efforts s'exerçant tous suivant la même direction et dans le même sens, est justifiée par la composition purement idéale des forces parallèles, comme nous allons le voir.

N. B. L'usage irrationnel s'est introduit d'appeler *force* ce que nous avons jusqu'ici appelé *effort* Nous nous y conformerons dans la suite.

§ **1**.

Conditions d'équilibre et composition des forces appliquées à un corps rigide libre.

4. Si les forces données sont parallèles et dans un même plan, les conditions d'équilibre sont :

1. *La somme algébrique des forces doit être nulle.*

2. *La somme algébrique des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan doit être nulle.*

Si l'on prend pour axe des y une droite parallèle à la direction des forces et située dans leur plan ; et, pour axe des x une droite perpendiculaire à l'axe des y et située dans ce même plan ; pour origine des coordonnées, un point arbitrairement choisi, les conditions d'équilibre s'énonceront analytiquement :

$$\begin{aligned} \Sigma P &= 0, \\ \Sigma P x &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

5. Si aucune de ces conditions n'est remplie, il y a une *résultante unique* R *parallèle* aux forces données.

1. *Son intensité est égale à la somme algébrique de celles des forces données. Cette somme détermine en même temps son sens.*

2. *La position de sa droite représentative est déterminée par la condition que le moment de la résultante unique par rapport à un point quelconque du plan des forces, est égal à la somme algébrique des moments des forces données par rapport au même point.*

$$\begin{aligned} & R = \Sigma P, \\ & R x_1 = \Sigma P x, \text{ d'où } x_1 = \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Si l'on change la direction de toutes les forces en les laissant parallèles entre elles et appliquées chacune à son propre point d'application, et si, en outre, on change leurs intensités tout en conservant entre elles les mêmes rapports qui existaient, on démontre que la résultante unique passe toujours par un même point du plan. Pour cette raison, ce point est appelé *centre des forces parallèles*. Les coordonnées de ce centre sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Sigma P x}{\Sigma P}, \\ y_1 &= \frac{\Sigma P y}{\Sigma P}. \end{aligned} \qquad (3)$$

De ces expressions on conclut que, si le centre des forces parallèles est pris pour origine des coordonnées $x_1 = 0$ et

$y_1 = 0$, et la somme des moments des composantes est nulle par rapport à l'origine. En d'autres termes, la somme algébrique des moments de forces parallèles entre elles et agissant dans un même plan est nulle par rapport au centre de ces forces.

6. Si la seconde des conditions (1) est remplie sans que la première le soit, il y a *une résultante unique* dont la droite représentative passe par l'origine. Son point d'application est situé sur l'axe des y à une distance de l'origine égale à la valeur de y_1 dans les expressions (3).

7. Si la première des conditions (1) est seule remplie, il y a *un couple résultant unique*, dont le moment M est égal à la somme des moments des forces données,

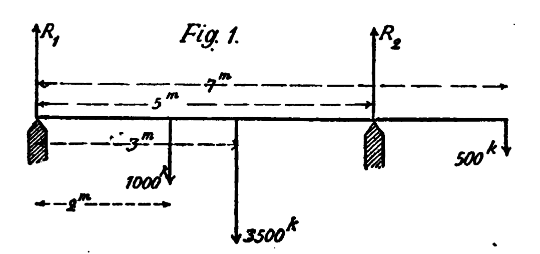
$$M = \Sigma P x,$$

et qui agit dans le plan des forces, ou, en d'autres termes, dont l'axe représentatif est perpendiculaire au plan des forces.

8. Remarque. — Le mode de représentation d'un couple est le même que l'on suit pour une force.

L'unité des moments est le kilogrammètre, comme l'unité des forces, le kilogramme.

9. Exemples. Les charges que supporte la poutre horizontale fig. (1) sont équilibrées par les réactions R_1 et R_2 dont on demande l'intensité, eurs points d'application et leur direction étant données.



Solution : $R_1 + R_2 + 1000 + 3500 + 500 = 0.$

$1000 \times 2 + 3500 \times 3 + R_2 \times 5 + 500 \times 7 = 0.$

On en déduit : $R_2 = -3200^k$ et $R_1 = -1800.$

10. Si les forces sont parallèles et non dans un même plan, les conditions d'équilibre sont :

1. *La somme algébrique des forces doit être nulle.*

2. *La somme algébrique des moments des forces par rapport à un premier plan parallèle aux forces doit être nulle.*

3. *La somme algébrique des moments des forces par rapport à un second plan parallèle aux forces et perpendiculaire au premier plan, doit également être nulle.*

Si l'on choisit le système d'axes coordonnés orthogonaux de manière que l'axe des z soit parallèle aux forces, ces conditions s'énoncent algébriquement comme suit :

$$\begin{aligned} \Sigma P &= 0, \\ \Sigma Px &= 0, \\ \Sigma Py &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

11. Si aucune de ces trois conditions n'est remplie, ou même si la première seule ne l'est pas, il y a *une résultante unique* R, *parallèle aux forces données.*

1. *Son intensité est égale à la somme algébrique de celles des forces données.*

2. *Son point d'application, appelé centre des forces parallèles pour des raisons analogues à celles énoncées n° 5, a pour coordonnées*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \\ y_1 &= \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \\ z_1 &= \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}. \end{aligned} \qquad (2)$$

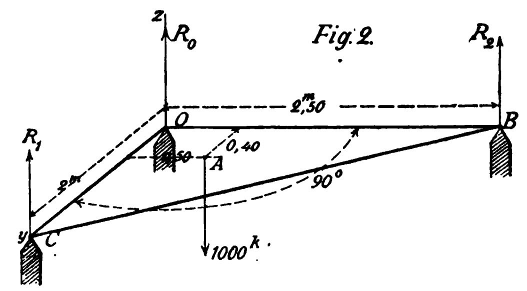
D'où l'on déduit que, pour tout plan passant par *le centre des forces parallèles*, la somme algébrique des moments de ces forces est nulle.

12. Si la première des conditions (1) est seule remplie, il y a *un couple résultant unique* agissant dans un plan paral-

lèle aux forces et faisant avec les plans des Y Z et des Z X des angles α et β; son moment M et les angles α et β sont donnés par

$$M = \sqrt{(\Sigma P x)^2 + (\Sigma P y)^2},$$
$$\cos \alpha = \frac{\Sigma P x}{M}, \qquad (3)$$
$$\cos \beta = \frac{\Sigma P y}{M}.$$

13. Exemple. Sur une table à 3 pieds, OBC, fig. 2, repose un poids de 1000 kil. dans la position indiquée. Ce poids est tenu en équilibre par les réactions des pieds R_0, R_1 et R_2 dont on demande la valeur.



Solution :

$$\left.\begin{array}{l} R_0 + R_1 + R_2 + 1000 = 0, \\ R_1 \times 2 + 1000 \times 0{,}40 = 0, \\ R_2 \times 2{,}50 + 1000 \times 0{,}50 = 0. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} R_2 = -200^k, \\ R_1 = -200\ , \\ R_0 = -600\ . \end{array}$$

14. Si les forces agissent dans un même plan mais ne sont pas parallèles, les conditions d'équilibre sont :

1. *La somme algébrique des projections des forces sur une première direction arbitrairement choisie dans le plan des forces, doit être nulle.*

2. *La somme algébrique des projections des forces sur une seconde direction prise dans le plan et perpendiculaire à la première, doit également être nulle.*

3. *La somme des moments des forces par rapport à un point quelconque du plan doit être nulle.*

$$\Sigma P \cos \alpha = 0,$$
$$\Sigma P \sin \alpha = 0, \qquad (1)$$
$$\Sigma P (x \sin \alpha - y \cos \alpha) = 0.$$

15. Si aucune de ces trois conditions n'est remplie, ou si l'une seulement des deux premières ne l'est pas, il y a *une résultante unique* R dont l'intensité est

$$R = \sqrt{(\Sigma P \cos\alpha)^2 + (\Sigma P \sin\alpha)^2},$$

et dont la droite représentative est située à une distance r de l'origine, donnée par

$$r = \frac{\Sigma P(x \sin\alpha - y \cos\alpha)}{R}.$$

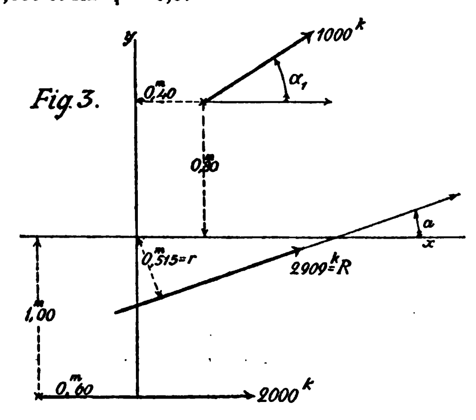
Cette droite est inclinée sur l'axe des x d'un angle a dont le cosinus est donné par

$$\cos a = \frac{\Sigma P \cos\alpha}{R}.$$

La valeur ci-dessus de r exprime que *le moment de la résultante par rapport à un point quelconque du plan est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même point.*

16. Si les deux premières conditions (1) sont remplies sans que la troisième le soit, il y a *un couple résultant unique*, dont le moment M est égal à la valeur du premier membre de la troisième équation (1), et qui agit dans le plan des forces.

17. Exemple. Données : les forces 1000^k et 2000^k de la fig. 3. De plus $\cos\alpha_1 = 0{,}866$ et $\sin\alpha_1 = 0{,}5$.



Solution :

$\Sigma P \cos\alpha = 2866^k$.	$R = 2909^k$.
$\Sigma P \sin\alpha = 500^k$.	$r = 0^m,515$.
$\Sigma P(x \sin\alpha - y\cos\alpha) = 1507^{km}$.	$\text{Cos}\, a = 0^m,985$.

18. Cas général de forces quelconques. — Les conditions d'équilibre sont exprimées par les six équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma P \cos\alpha = 0\,, \\ Y &= \Sigma P \cos\beta = 0, \\ Z &= \Sigma P \cos\gamma = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \Sigma P\,(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0\,, \\ M &= \Sigma P\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0\,, \\ N &= \Sigma P\,(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

19. Si les trois premières conditions sont seules remplies, il y a *un couple résultant unique* W, dont les couples composants dans les plans coordonnés ont pour moments respectifs L, M, N, valeurs des premiers membres des équations (2).

20. Si les trois conditions (2) sont seules remplies, il y a *une résultante unique* R, dont les projections sur les axes coordonnés ont pour grandeurs X, Y, Z, valeurs des premiers membres des équations (1).

21. S'il n'est satisfait complétement à aucun des deux systèmes de conditions (1) et (2), en général il y aura *une résultante* R dont la droite représentative passe par l'origine, *et un couple résultant* W. Ce système peut encore être réduit à *deux résultantes non concourantes et non parallèles* par la composition d'une des forces du couple avec la résultante qui passait à l'origine. Il y a une infinité de systèmes de deux forces non concourantes équivalents à un système d'un nombre quelconque de forces. Il y a aussi une infinité de systèmes, composés chacun *d'une force et d'un couple*, et qui équivalent tous à un système donné de forces; mais pour tous ces systèmes, *la grandeur, la direction et le sens de la résultante* R *restent invariables; la position*

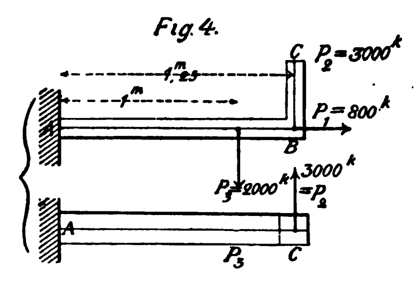
de sa droite représentative et les éléments déterminants du couple sont seuls variables.

Dans le cas particulier où les valeurs X, Y, Z, L, M, N, des premiers membres des équations (1) et (2), seraient liées par la relation

$$LX + MY + NZ = 0,$$

la résultante R et le couple W agiraient dans un même plan, et leur système serait réductible à une seule force R dont la droite représentative est située à une distance $\frac{W}{R}$ de l'origine et dans le plan commun.

22. Exemple. — On demande de composer le système des forces appliquées au corps rigide ABC, fig. 4, en prenant le point A pour point d'application de la résultante.



Solution. Les trois forces données ayant leurs directions orthogonales, le choix des axes n'est pas douteux. Les composantes de la résultante R seront :

suivant l'axe des x	$+ 800^k$,
» » » y	$+ 3000$,
» » » z	$- 2000$.

Donc
$$R = \sqrt{800^2 + 3000^2 + 2000^2} = 3693^k.$$

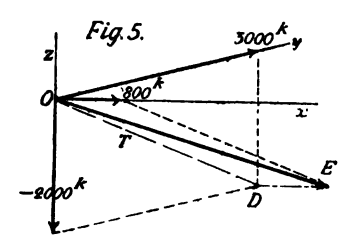
Les angles a, b, c que la direction de la résultante fait avec les axes des x, des y et des z respectivement sont donnés par

$$\cos a = \frac{800}{3693} = 0{,}217,$$

$$\cos b = \frac{3000}{3693} = 0{,}812.$$

$$\cos c = -\frac{2000}{3693} = -0{,}542.$$

Dans la figure 5 est consigné ce résultat.



Les moments des couples composants sont :

Plan des zy,	axe des x	1500^{km},
» » zx,	» » y	-2000 ,
» » yx,	» » z	-3750 .

Donc $$W = \sqrt{1500^2 + 2000^2 + 3750^2} = 4507^{km}.$$

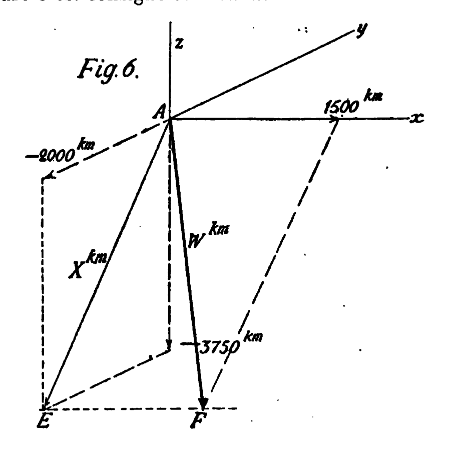
Les angles A, B, C que l'axe représentatif du couple résultant W fait avec les axes des coordonnées sont donnés par

$$\cos A = \frac{1500}{4507} = 0,333,$$

$$\cos B = -\frac{2000}{4507} = -0,444,$$

$$\cos C = -\frac{3750}{4507} = -0,833.$$

Dans la figure 6 est consigné ce résultat.



§ 2.

Centres de gravité et d'élasticité.

23. On appelle *centre de gravité* d'un corps le centre d'un système de forces parallèles proportionnelles aux poids ou aux masses des portions infinitésimales de ce corps.

Par extension, on appelle *centre de gravité* d'une ligne, d'une surface, d'un volume, le centre d'un système de forces parallèles proportionnelles aux grandeurs des éléments infinitésimaux de ces lignes, surfaces ou volumes.

Le premier coïncide avec le second dans les corps homogènes sous le rapport de leur masse.

Par une nouvelle extension, on appelle encore centre de gravité d'une surface ou d'un volume, le centre d'un système de forces parallèles et proportionnelles non-seulement aux éléments de cette surface ou de ce volume, mais encore à une autre quantité E variable avec la position de l'élément dans la figure géométrique à laquelle il appartient. Si E représente l'*élasticité* variable des divers éléments d'une surface plane, le centre des forces parallèles définies comme nous venons de le dire, prend plus particulièrement le nom de *centre d'élasticité* de cette surface plane.

24. Les coordonnées du *centre d'élasticité* d'une surface plane, composée d'éléments superficiels s, ont donc pour valeurs :

$$x_1 = \frac{\Sigma E s x}{\Sigma E s}, \qquad y_1 = \frac{\Sigma E s y}{\Sigma E s}. \qquad (1)$$

Lorsque le centre d'élasticité est pris pour origine, x_1 et y_1 sont nuls, et par suite aussi $\Sigma E s x$ et $\Sigma E s y$; d'où suit que *la somme des moments des forces élastiques par rapport à une droite passant par le centre d'élasticité, est nulle.*

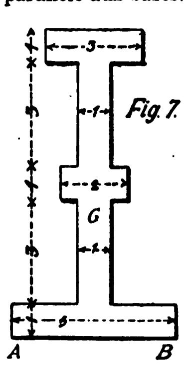
Le centre de gravité coïncide avec le centre d'élasticité pour les surfaces homogènes sous le rapport de l'élasticité.

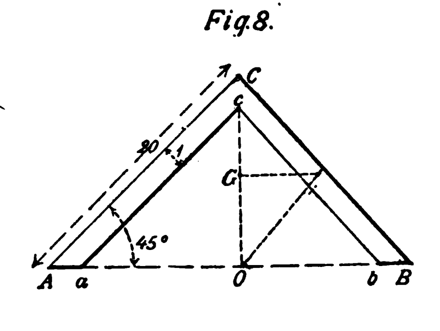
25. La méthode pour rechercher le centre d'élasticité d'une surface consiste à décomposer cette surface en parties dont on connaît la position du centre d'élasticité, et à écrire les expressions (1).

26. Exemple. I. Le centre de gravité de la fig. 7 est en G, à une distance 4 de AB.

II. Le centre de gravité de la fig. 8, est en G à une distance 6,724 de AB.

III. Chercher le centre d'élasticité d'un carré dans lequel l'élasticité, égale à E_0 à la base inférieure, va en croissant uniformément jusque E_1, à la base supérieure, en restant la même sur toute la longueur d'une parallèle aux bases.





Solution :

$$\frac{E - E_0}{x} = \frac{E_1 - E_0}{l},$$

d'où

$$E = E_0 + \frac{E_1 - E_0}{l} x;$$

élasticité totale

$$\int_0^l E l x \, dx = \frac{E_0 + E_1}{2} l^2;$$

$$\frac{E_0 + E_1}{2} l^2 x_1 = \int_0^l E l x \, dx = \frac{E_0 + 2 E_1}{6} l^3;$$

d'où

$$x_1 = \frac{1}{3} \frac{E_0 + 2 E_1}{E_0 + E_1} l.$$

§ 3.

Des moments d'inertie.

27. On appelle *moment d'inertie* d'un corps par rapport à une droite, la somme des produits des *masses* élémentaires de ce corps par le carré de leurs distances respectives à cette droite.

Chaque *masse* élémentaire est représentée par le produit de son volume (en mètres cubes) et de sa densité (ou masse du mètre cube). Si δ est la densité d'un élément v^{mc} de volume situé à une distance d^m de l'axe, le moment d'inertie I de la masse entière $M = \Sigma \delta v$, sera

$$I = \Sigma \delta v d^2.$$

28. Par une extension analogue à celle que nous signalions pour le centre de gravité, on admet des moments d'inertie de lignes, de surfaces, de volumes. Et, par une nouvelle extension, les mêmes dénominations s'appliquent encore au cas où l'on remplace la densité δ par une autre quantité quelconque, telle que l'élasticité E, variable avec la position que l'élément considéré occupe dans la figure.

Il importe de rappeler les deux propriétés suivantes des moments d'inertie.

29. *Le moment d'inertie* I' *d'un corps par rapport à un axe situé à une distance* D *de son centre de masse, est égal au moment d'inertie* I *du même corps par rapport à un second axe parallèle au premier mais passant par le centre de masse, augmenté du produit de la masse du corps par le carré de la distance des axes.*

Cette propriété, vraie encore lorsque le mot élasticité y remplace le mot masse, permet de déterminer facilement le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque dès que l'on connaît tous ceux qui se rapportent à des axes passant par le centre de masse (ou d'élasticité), et la propriété suivante ramène la connaissance de ces derniers à

celle de trois moments d'inertie principaux par rapport à trois axes perpendiculaires entre eux.

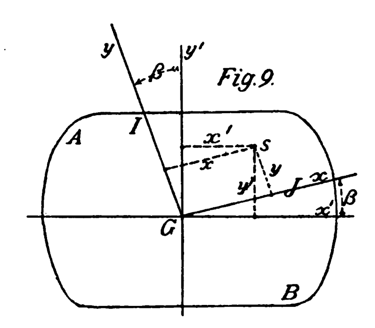
Si l'on connait les moments d'inertie d'un corps par rapport à tous les axes qui passent par son centre de masse, et si, à partir de ce point, on porte sur chacun de ces axes une longueur inversement proportionnelle à la racine carrée du moment d'inertie correspondant, le lieu des points extrêmes de ces longueurs est un ellipsoïde dont le centre de figure coïncide avec le centre de masse.

Les moments d'inertie principaux se rapportent aux axes de l'ellipsoïde.

30. *Pour toute surface plane il existe une ellipse centrale d'inertie ou d'élasticité.* Nous allons le démontrer.

Soient, fig. 9 : G, le centre d'élasticité d'une figure plane A B, point que nous prenons pour origine des coordonnées ; Gx, Gy, un système d'axes rectangulaires ; s, un élément superficiel quelconque de la figure, ayant pour coordonnées x et y, et dont l'élasticite est représentée par E ; faisons sE = S, et

$$I = \Sigma S x^2; \quad J = \Sigma S y^2; \quad K = \Sigma S x y. \qquad (1)$$



I et J seront respectivement les moments d'inertie de la surface par rapport aux axes des y et des x ; et K sera appelé *produit d'inertie.*

Recherchons les moments et produit d'inertie I', J', K' par rapport à un second système d'axes orthogonaux Gx' et

Gy', faisant un angle β quelconque avec le premier. Nous aurons :

$$I' = \Sigma S x'^2; \quad J' = \Sigma S y'^2; \quad K' = \Sigma S x' y'. \qquad (2)$$

Entre x, y, x' et y' existent les relations connues

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\beta - y \sin\beta, \\ y' &= x \sin\beta + y \cos\beta, \\ x'^2 + y'^2 &= x^2 + y^2, \end{aligned} \qquad (3)$$

qui conduisent facilement aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} I + J &= I' + J' = \text{const.} = C, \\ IJ - K^2 &= I'J' - K'^2 = \text{const.} = C'. \end{aligned}$$

D'où $\quad I' = \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{C^2}{4} - C' - K'^2}$, maximum pour $K' = 0$,

$J' = \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{C^2}{4} - C' - K'^2}$, minimum pour $K' = 0$.

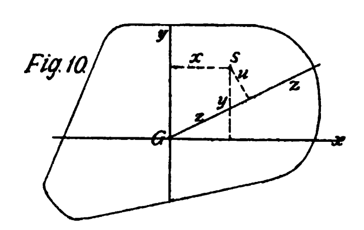
Donc dans toute figure plane, il existe une paire d'axes orthogonaux passant par le centre d'élasticité, pour lesquels les moments d'inertie de cette surface sont l'un maximum, l'autre minimum; ils sont appelés **axes principaux d'inertie.**

L'angle β' que fait ce second système d'axes avec le premier est donné par l'équation

$$K' = \frac{\sin 2\beta'}{2}(I - J) + K \cos 2\beta' = 0$$

d'où $\quad \operatorname{tg} 2\beta' = \frac{2K}{J - I}.$

Cela posé, prenons, fig. 10, les axes principaux d'inertie



de la surface donnée pour axes des coordonnées, et évaluons le moment d'inertie M par rapport à un autre axe quelconque faisant l'angle α avec l'axe des x. Soient :

$$I = \Sigma S x^2 ; J = \Sigma S y^2 ; K = \Sigma S xy = 0 : M = \Sigma S u^2.$$

On a $$u = y \cos \alpha - x \sin \alpha,$$

d'où $$M = \Sigma S u^2 = I \sin^2 \alpha + J \cos^2 \alpha - 2 K \sin \alpha \cos \alpha,$$

ou $$M = I \sin^2 \alpha + J \cos^2 \alpha. \qquad (5)$$

Faisons $$a = \frac{C}{\sqrt{J}};\quad b = \frac{C}{\sqrt{I}};\quad \rho = \frac{C}{\sqrt{M}}; \qquad (6)$$

et sur les axes des x, des y et des z, portons, à partir de l'origine, des longueurs respectivement égales à a, b, ρ; et cherchons le lieu des extrémités des rayons ρ. Si nous représentons par x et y les coordonnées courantes de ce lieu, nous aurons :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \alpha, \\ y &= \rho \sin \alpha, \\ x^2 + y^2 &= \rho^2 \end{aligned} \qquad (7)$$

et l'élimination de α conduit à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

qui est celle de l'ellipse d'inertie rapportée à son centre et à ses axes. C. q. f. d.

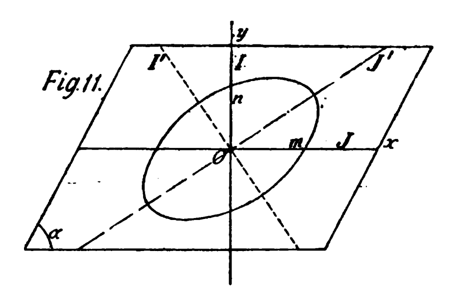
31. Propriété. — *Le produit d'inertie par rapport à deux diamètres conjugués dans l'ellipse centrale d'inertie, est nul; et les diamètres conjugués jouissent seuls de cette propriété.* La démonstration de ce théorème est fort simple.

22. Exemple. — Tracer l'ellipse centrale d'inertie d'un parallélogramme (fig. 11) dont la hauteur est $2n$, la base $2m$, l'angle aigu de deux côtés, α. Un premier système d'axes coordonnés étant Ox et Oy, on a

$$I = \Sigma s x^2 = \frac{4}{3} mn\,(m^2 + n^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha),$$

$$J = \Sigma s y^2 = \frac{4}{3} mn^3,$$

$$K = \Sigma s xy = \frac{4}{3} mn^3 \operatorname{cotg} \alpha.$$



On en déduit $$\operatorname{tg} 2\beta' = \frac{2n^2 \operatorname{cotg}\alpha}{n^2 - m^2 - n^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}.$$

Ensuite $$I' + J' = I + J = \frac{4mn}{3}\,(m^2 + n^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha),$$

$$I'J' = IJ - K^2 = \frac{16 m^4 n^4}{9};$$

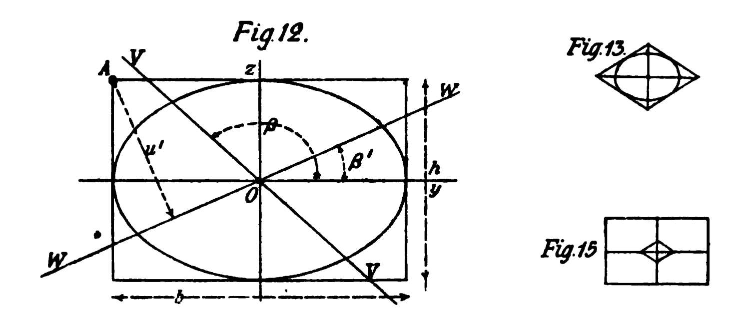
d'où $$I' = \frac{2mn}{3}\left\{m^2 + n^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha + \sqrt{(m^2 + n^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha)^2 - 4m^2 n^2}\right\},$$

$$J' = \frac{2mn}{3}\left\{m^2 + n^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha - \sqrt{(m^2 + n^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha)^2 - 4m^2 n^2}\right\}.$$

La question est ainsi complètement résolue.

Dans le cas où il s'agirait d'un rectangle (fig. 12), on trouverait $\beta' = 0$, c'est-à-dire que les axes de figure sont axes principaux d'inertie; et les moments d'inertie principaux sont respectivement $\frac{4m^3 n}{3}$ et $\frac{4mn^3}{3}$, de manière que le rapport des axes de l'ellipse d'inertie est le même que celui des deux dimensions du rectangle.

Application. — On donne (fig. 12), $b = 2h$, et $\beta = 151°55'$; on demande l'angle β' de la direction WW conjuguée au diamètre VV, ainsi que le moment d'inertie I' par rapport à la droite W.



On a $\qquad \operatorname{tg}\beta = -0{,}5336\,; \qquad \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\beta' = -\frac{1}{4}\,,$

d'où $\qquad \operatorname{tg}\beta' = 0{,}4685 \qquad$ et $\qquad \beta' = 25°6'.$

$$I' = \frac{b^3 h}{12}\sin^2\beta' + \frac{b h^3}{12}\cos^2\beta' = 0{,}01604\,b^4.$$

Dans le cas d'un losange (fig. 13), on a $n = m \sin\alpha$ et $\operatorname{tg} 2\beta' = \operatorname{tg}\alpha$, d'où l'on conclut que $\beta' = \frac{\alpha}{2}$ et que les axes de l'ellipse coïncident avec les diagonales ; de plus ils leur sont proportionnels.

D et d étant ces diagonales, les moments d'inertie principaux sont respectivement

$$I' = \frac{D^3 d}{48},$$

$$J' = \frac{D d^3}{48}.$$

Pour tout polygone régulier l'ellipse centrale devient un cercle.

Voir note I à la fin du volume.

§ 4.

Du centre de percussion et du noyau central.

33. On appelle *centre de percussion d'une figure plane* CD (fig. 14) *par rapport à un axe* TT *de son plan*, le centre d'un système de forces parallèles et proportionnelles chacune au produit Es et à la distance du point d'application à l'axe TT.

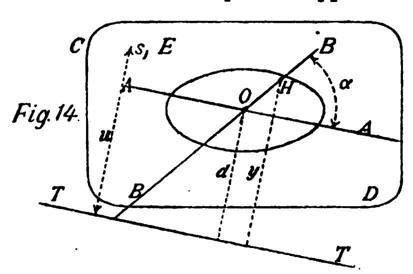


Fig. 14.

En appelant u la distance de l'élément s à l'axe TT, et y, celle du centre de percussion au même axe, nous aurons

$$y \Sigma \mathrm{E} s u = \Sigma \mathrm{E} s u^2. \qquad (1)$$

La distance d du centre de gravité O au même axe est donnée par $d \Sigma \mathrm{E} s = \Sigma \mathrm{E} s u$;

ou $$\mathrm{S} d = \Sigma \mathrm{E} s u,$$

et (n° 29) $$y \mathrm{S} d = \Sigma \mathrm{E} s u^2 = \mathrm{I}_a + \mathrm{S} d^2. \qquad (2)$$

Donc $$y = d + \frac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{S} d}. \qquad (3)$$

De plus, le centre de percussion H se trouve sur le diamètre BB de l'ellipse centrale conjugé à la direction AA de l'axe de percussion. Si α est l'angle de ces deux diamètres, on a visiblement

$$\overline{\mathrm{HO}} = \frac{\mathrm{I}_a}{\mathrm{S} d \sin \alpha}. \qquad (4)$$

34. Si l'on prend successivement pour axe de percussion toutes les touchantes au contour de la figure considérée, le

lieu des centres de percussion correspondants porte le nom de *noyau central* de la figure.

35. Exemples. Le noyau central d'un rectangle (fig. 15) est un losange dont les diagonales ont un tiers de la longueur des axes du rectangle et coïncident avec eux.

Le noyau central d'un cercle est une circonférence d'un diamètre quatre fois plus petit.

CHAPITRE I.

DÉFINITIONS, HYPOTHÈSES ET CONVENTIONS

36. La théorie de la résistance des matériaux a pour objet l'étude des forces moléculaires qui se développent dans les corps solides sous l'action des efforts extérieurs auxquels ils se trouvent soumis; et, pour but principal, la détermination de certaines dimensions des pièces qui entrent dans la composition des machines ou des constructions fixes.

37. Élasticité. — Tout corps est considéré comme composé de particules en équilibre sous l'action des forces intérieures et extérieures qui les sollicitent, et se déplaçant les unes par rapport aux autres dès que le système des forces qui les tenaient en équilibre est modifié d'une manière quelconque, et notamment par l'application d'un effort extérieur nouveau. Ces déplacements ont généralement pour résultat *une déformation*, c'est-à-dire un changement dans la forme extérieure du corps ou un déplacement des particules situées à sa surface. Cette propriété des corps d'être ainsi composés se désigne sous le nom d'*élasticité*.

Sous l'influence d'un même effort extérieur, les déplacements moléculaires peuvent varier d'une substance à une autre et même d'un point à l'autre de la même substance. Or, comme la cause est mathématiquement égale à l'effet, cette circonstance indique que chaque corps a une propriété spécifique sous le rapport de l'élasticité; que l'élasticité varie d'un corps à l'autre, ou d'un point à l'autre d'un même corps.

L'élasticité est donc une quantité que l'on pourra mesurer dès que l'on aura choisi une unité.

Lorsque l'élasticité est la même en tous les points d'un corps, on dit que ce corps est *homogène*. Il n'existe aucune substance homogène. Mais, dans les limites ordinaires des constructions mécaniques, l'on peut, sans erreur préjudiciable, considérer comme homogènes la plupart des substances employées.

38. Équilibre entre les forces extérieures et les forces élastiques. — On emploie une expression impropre lorsque l'on dit en statique qu'un corps est soumis à *une force*. Cela signifie toujours que le corps est tout au moins soumis à deux forces égales, opposées et se faisant équilibre. Car l'effet d'une seule force P sur un corps serait de le transporter suivant sa propre direction et son sens et, en général, de le faire en même temps tourner autour de son centre de masse, mais non de troubler l'équilibre intérieur de ses particules. L'effet de deux forces directement opposées mais inégales, P_1 et P_2, ayant une différence égale à l'unique force P, dont nous venons de parler; serait tout autre que celui de cette dernière agissant seule. En effet, le corps considéré dans son entier, serait mis en mouvement par la force $P_1 - P_2 = P$, comme ci-devant par la force P seule; mais en outre, la plus petite force, P_2, a pour effet de *tendre* le corps, de modifier l'état d'équilibre des particules tel qu'il était avant l'application des forces. Il n'y a donc que l'effort P_2 qui intéresse la résistance des matériaux, la différence $P_1 - P_2$ n'ayant d'influence que sur le mouvement de l'ensemble du corps considéré. Peu importe donc cette différence, et mieux vaut la supposer nulle.

D'une manière plus générale, on admet toujours dans les calculs relatifs à la résistance des matériaux, le principe suivant :

Principe. — *Pour tout solide considéré sous le rapport de sa résistance moléculaire, les forces extérieures qui lui sont appliquées se font équilibre indépendamment des forces moléculaires qu'évoque leur action.*

Et de ce principe découle naturellement le suivant :

Principe. — *Si l'on coupe un solide soumis à des forces extérieures par une surface idéale quelconque, il y a équilibre entre les forces moléculaires évoquées dans cette surface et les forces extérieures agissant en des points compris depuis cette surface jusqu'à l'une des extrémités du solide.*

En effet, s'il y a cohésion entre la matière située d'un côté de la surface idéale et celle qui est située de l'autre, c'est que les forces moléculaires qui y sont développées de part et d'autre se font équilibre. Supposons que le système des forces moléculaires d'un côté de la surface soit réductible à une seule force Q. Celle-ci, tenant en équilibre les forces moléculaires de l'autre côté, peut être considérée comme une force extérieure par rapport à la portion de la pièce située de ce côté ; par suite, puisque, pour cette portion, il doit y avoir équilibre entre les forces extérieures, l'équilibre existe entre Q, ou les forces moléculaires évoquées dans la surface idéale, et les forces extérieures appliquées d'un même côté de cette surface.

39. Remarque. — Lorsque, pour suivre la coutume, nous dirons qu'un corps considéré est soumis à une force P, nous sous-entendrons toujours qu'une ou d'autres forces extérieures la tiennent en équilibre. Ou bien nous supposerons que le corps est fixé de telle façon que la force P évoque nécessairement des réactions extérieures au corps et qui le tiennent en équilibre.

40. Déformation permanente, rupture. — Les particules d'un corps solide cèdent toujours à un effort extérieur, si petit qu'il soit. L'application de cet effort produit donc une déformation qui persiste tant que dure son action. Si l'effort est assez petit, après sa suppression, le corps reprend sa forme et ses dimensions primitives. Mais si cet effort a atteint une certaine limite, après sa suppression, le corps ne reprend pas sa forme et ses dimensions primitives ; il reste ce que l'on appelle *une déformation permanente.*

L'expérience le prouve et démontre également que, par cette déformation permanente, le corps a acquis un *nouvel état d'élasticité* tel que, tout effort moindre que le précédent et appliqué dans les mêmes conditions, ne produira plus aucune déformation permanente; que tout effort supérieur, au contraire, produira une nouvelle déformation permanente et changera de nouveau définitivement les qualités élastiques du corps.

L'effort sous lequel s'est produite une déformation permanente porte le nom de **limite d'élasticité** *par rapport aux efforts moindres appliqués dans les mêmes conditions.*

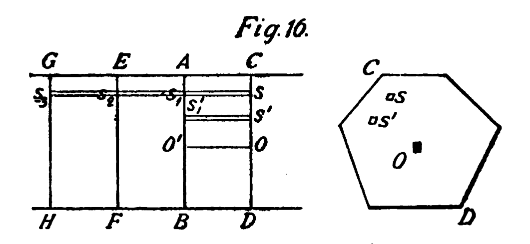
La limite d'élasticité n'indique donc pas une qualité absolue d'une substance; elle ne fait qu'en marquer un état relatif, variable avec les circonstances.

Parmi les déformations permanentes, il en est une remarquable à laquelle on arrive fatalement lorsque l'on augmente indéfiniment l'effort appliqué à un corps: c'est *la rupture*, la séparation définitive du corps en plusieurs morceaux écartés l'un de l'autre à des distances telles que les forces élastiques ont cessé d'agir. L'effort qui produit la rupture porte le nom de *charge de rupture.*

La connaissance de la charge de rupture des matériaux que l'on emploie et celle de la première limite d'élasticité pour laquelle on ait observé une déformation permanente appréciable, sont des renseignements utiles pour la rédaction des projets. Mais il faut se garder d'en exagérer l'importance.

11. Prisme ou solide de résistance; état primitif. — Soit (fig. 16) une portion de prisme géométrique comprise

Fig. 16.

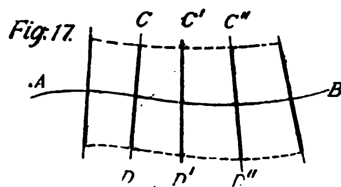


entre deux sections normales AB et CD indéfiniment voisines. On décompose ce volume en éléments prismatiques indéfiniment petits dans toutes leurs dimensions, ss_1, $s's'_1$,...., et ayant leurs arêtes parallèles à celles du prisme que compose leur ensemble. L'un quelconque de ces prismes prend le nom de *fibre élémentaire*. Une file de fibres élémentaires ss_1, s_1s_2, s_2s_3,...... dans le prolongement l'une de l'autre tout le long du prisme géométrique donné, constitue *une fibre du prisme*.

Considérons une section normale CD d'un prisme de résistance, et, dans cette section, les bases de toutes les fibres élémentaires s, s',.... Supposons que l'on connaisse la quantité spécifique qui donne la mesure de l'élasticité de la matière à chacune de ces bases infinitésimales. Qu'à chacune d'elles on applique, dans le même sens, un effort normal et proportionnel à cette quantité spécifique. On obtiendra par cette opération un ensemble de forces parallèles agissant toutes dans le même sens et par conséquent ayant *une résultante unique* appliquée en un certain point O de la section. Ce point O, où est appliquée cette résultante unique, se nomme le *centre d'élasticité* de la section (n°s 23 et 24).

La fibre élémentaire située au centre d'élasticité de la section porte le nom de *fibre élémentaire moyenne*; et la fibre du prisme, qui contient tous les centres d'élasticité des diverses sections, celui de *fibre moyenne du prisme*.

Les solides, auxquels on donne le nom de *prismes de résistance*, n'ont pas toujours une forme géométriquement prismatique. Leur forme est, au contraire, très variée, mais toujours soumise à certaines conditions que nous allons faire connaître en définissant le *prisme de résistance à l'état primitif*, état purement *idéal*, pour lequel on suppose qu'aucune force extérieure, pas même la pesanteur, n'agit sur le solide.



Soit AB (fig. 17) une courbe ne présentant ni jarret ni point multiple; plane ou à double

courbure, pourvu que la seconde courbure soit très-faible en tous les points. Imaginons la série de tous ses plans normaux CD, C'D'...., et, sur chacun de ces plans, traçons une figure assujettie aux conditions suivantes : 1° d'avoir son centre d'élasticité sur la courbe AB ; 2° d'avoir des dimensions très petites comparativement au rayon de courbure de la ligne AB au point où elle rencontre chaque section ; 3° de ne varier de forme et de dimensions d'une section à la suivante que d'une manière continue et très lente. Le solide ainsi engendré et supposé n'être soumis à aucune force extérieure, constitue ce que l'on appelle un *prisme de résistance à l'état primitif.*

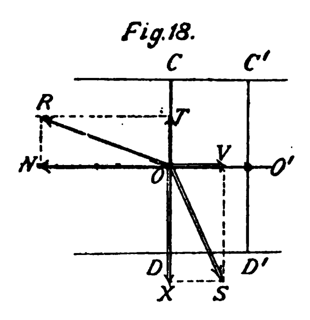
42. Lorsqu'un tel prisme est soumis à des forces extérieures, il naît dans son intérieur des forces moléculaires que l'on peut évaluer au moyen du principe suivant, simple application de ce qui précède.

Principe. — *Dans tout prisme de résistance soumis à des forces extérieures, il y a équilibre entre les forces élastiques évoquées dans une section normale quelconque et les forces extérieures appliquées dans toute la région comprise entre cette section et l'une des extrémités de la pièce.*

43. Conventions sur la nature des déformations. — Si les forces extérieures dont il est question dans le principe précédent, sont réductibles à une résultante unique, les forces moléculaires développées dans la section normale le sont également. Et, dans ce cas, le point d'application de la résultante unique dans le plan de la section est bien déterminé et il porte le nom de *centre des tensions* ou *des pressions* indifféremment. Ce point ne coïncidera pas en général avec le centre d'élasticité ; il conviendra alors de remplacer la résultante unique appliquée au centre des pressions par par une force égale, parallèle, de même sens, appliquée au centre d'élasticité et un couple facile à calculer. Dans tous les cas, la composition des forces extérieures, auxquelles les forces élastiques développées dans la section considérée font

équilibre, ne mènera à rien de plus compliqué que le système d'une force appliquée au centre d'élasticité de la section, et d'un couple. Tel est le système composé de la force R appliquée au centre d'élasticité O de la section CD, fig. 18, et du couple S (représenté par une ligne double).

Fig. 18.



Cela étant, que l'on décompose la force R en deux autres, l'une N normale à la section, l'autre T tangentielle; et le couple S en deux également, l'un V dont les forces agissent dans le plan de la section, l'autre X dont les forces agissent dans un plan normal à la section. On obtient ainsi deux forces N et T dont le point d'application est au centre d'élasticité, et deux couples que l'on désigne comme suit :

La composante N, *normale à la section et appliquée au centre d'élasticité, porte le nom de* **tension totale.**

La composante T, *dans le plan de la section et appliquée au centre d'élasticité, porte le nom d'***effort tranchant.**

Le couple X, *agissant dans un plan normal à la section, porte le nom de* **moment de flexion** *ou* **moment fléchissant.**

Le couple V, *agissant dans le plan même de la section, porte nom de* **moment de torsion.**

44 **Exemple.** — Dans l'exemple donné, nº 22 (fig. 4), rechercher pour la section d'encastrement la tension totale, l'effort tranchant le moment de flexion et le moment de torsion.

Solution. $N = 800^{k}$; $T = \sqrt{\overline{3000}^2 + \overline{2000}^2} = 3606^{k}$;

$\cos(T, y) = 0{,}832$; $\cos(T, z) = -0{,}555$.

$V = 1500^{km}$; $X = \sqrt{\overline{2000}^2 + \overline{3750}^2} = 4250^{km}$;

$\cos(X, y) = -0{,}471$; $\cos(X, z) = -0{,}882$.

Le plan du couple X se projette sur le plan des yz suivant une droite qui fait avec l'axe des z un angle dont le cosinus est 0,471 et qui est par conséquent de 61°,55′; et, avec l'axe des y, un angle de 90° + 61°,55′ = 151°,55.

(Voir n° 32, fig. 12, la recherche du diamètre conjugué à cette direction dans l'ellipse centrale d'inertie d'une section rectangulaire dont la base est double de la hauteur).

45. Conventions. — 1° *Si la tension totale* N *agissait* **seule** *sur la section* CD, *cette section plane et normale à l'état primitif resterait encore plane et normale à l'état déformé et conserverait ses dimensions premières, mais se serait éloignée ou rapprochée de la section voisine* C′D′ *suivant la direction des fibres, en restant donc parallèle à elle-même. Ce genre de déformation prend le nom d'***allongement simple** *ou de* **raccourcissement simple**.

2° *Si l'effort tranchant* T *agissait* **seul** *sur la section* CD, *cette section plane et normale à l'état primitif resterait encore plane et normale à l'état déformé et conserverait ses dimensions premières, mais aurait glissé parallèlement à elle-même dans la direction et le sens de* T *et sans tourner, par un effet comparable à un* **cisaillement**; *genre de déformation qui porte le nom de* **glissement simple**, *et pour lequel on suppose que, entre la fibre moyenne à l'état déformé et la fibre moyenne à l'état primitif, il n'y a qu'une différence de position négligeable.*

3° *Si le moment fléchissant* X *agissait* **seul** *sur la section* CD, *cette section plane et normale à l'état primitif serait encore plane et normale à l'état déformé et conserverait ses dimensions premières, mais aurait tourné autour d'une droite située dans la section, passant par son centre d'élasticité et la divisant en deux régions,*

l'une où les fibres sont allongées, l'autre où elles sont raccourcies; déformation qui porte le nom de **flexion simple,** *et pour laquelle on suppose que, entre la fibre moyenne à l'état primitif et la fibre moyenne légèrement courbée, la différence de longueur est négligeable.*

4° *Si le moment de torsion* V *agissait* **seul** *sur la section* CD, *cette section plane et normale à l'état primitif serait encore plane et normale à l'état déformé, et conserverait ses dimensions premières, mais aurait, sans quitter son plan, tourné autour d'un axe perpendiculaire à la section et passant par le centre d'élasticité; déformation qui porte le nom de* **torsion simple,** *et pour laquelle on suppose que la fibre élémentaire moyenne n'a changé ni de grandeur ni de position.*

5° *La* **tension élastique** *produite par l'une de ces déformations simples sur une fibre élémentaire quelconque de la section, est supposée avoir la même direction que le déplacement de la base de la fibre.*

6° *Le déplacement total ou définitif de la base d'une fibre élémentaire amené par plusieurs de ces déformations simples* **se produisant simultanément,** *se compose de ces déformations simples suivant les mêmes règles que les forces appliquées en un même point. Et la* **tension élastique** *définitive produite par plusieurs de ces déformations combinées est la résultante des tensions dues à chacune de ces déformations prise isolément.*

46. Ces conventions ne sont acceptables que dans les limites ordinairement admises dans le calcul des dimensions des pièces de machines.

47. Elles nous conduisent à étudier dans les quatre chapitres suivants les phénomènes d'allongement simple, de cisaillement simple, de flexion simple et de torsion simple; après quoi nous passerons aux déformations composées.

CHAPITRE II.

EXTENSION OU COMPRESSION SIMPLE.

48. Données d'expériences et conventions. — Considérons un solide de résistance (fig. 19), géométriquement prismatique, homogène, ayant une longueur L mètres à l'état primitif, et une section S mètres carrés que l'on suppose invariable malgré l'application d'efforts extérieurs. Après l'avoir fixé solidement à l'une de ses extrémités AB, nous le soumettons, à l'autre extrémité CD, à une tension totale de N kilog. Sous cette influence, le prisme s'allonge ou se raccourcit en tout d'une quantité que nous mesurons, et que nous appelons l mètres.

Fig. 19.

Puisque le prisme est homogène, les allongements produits dans des portions ayant primitivement la même longueur, sont égaux. Par suite, l'allongement par mètre courant

$$i = \frac{l}{L}. \qquad (1)$$

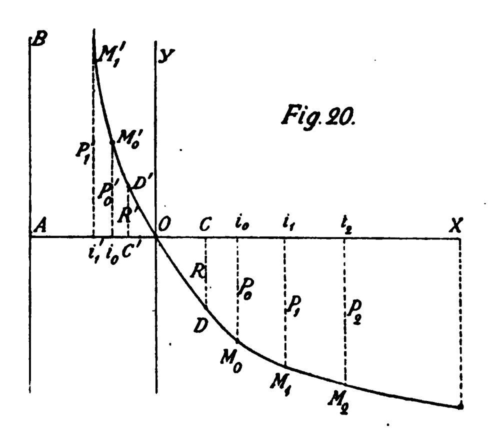
Ce rapport i porte le nom d'*allongement proportionnel* ou de *raccourcissement proportionnel* suivant le sens dans lequel agit la force N. Dans le dispositif fig. 19, c'est d'un allongement qu'il s'agit. Ce terme peut du reste s'employer d'une manière générale en considérant un raccourcissement comme un allongement négatif, ou inversement.

Puisque la tension totale N^K agit au centre d'élasticité de la section CD et, par conséquent, de toutes les autres, il en résulte qu'elle se répartit uniformément sur toute la section; d'où l'on conclut que, pour chacune des fibres élémentaires, la tension par mètre carré est la même et égale à

$$P = \frac{N}{S} \qquad (2)$$

Dans l'essai que nous venons de décrire, on mesure, par les moyens connus, les quantités L, S, N et l et l'on en déduit, par le calcul, la tension P kil. par mètre carré et l'allongement i par mètre courant.

L'expérience prouve que l'allongement i varie lorsque la tension P des fibres varie. On peut donc se donner d'avance une série de valeurs de P, et mesurer pour chacune d'elles l'allongement i produit, dresser le diagramme de cette dernière fonction et trouver ainsi *la loi* suivant laquelle les allongements proportionnels varient avec les tensions des fibres. A cet effet soient : i_0, i_1, i_2, ... les allongements pris sous les tensions P_0, P_1, P_2......, traçons les axes OX et OY, fig. 20 ; sur l'axe des x et à partir du point O, vers la



gauche, portons une longueur $\overline{OA}$ pour représenter un mètre et traçons la droite AB parallèle à OY : puis, sur l'axe OX, à la même échelle, et à partir du même point O, portons des longueurs égales à i_0, i_1...... Choisissons une échelle pour les tensions P et faisons $\overline{M_0 i_0} = P_0$, $\overline{M_1 i_1} = P_1$...... Les points M se trouvent sur le diagramme cherché qui peint aux yeux la loi du phénomène.

Il est utile de compléter l'expérience en mesurant aussi les raccourcissements i' sous des compressions P', et en construisant le diagramme OM'.

On pourrait rechercher les formules algébriques propres à exprimer avec un certain degré d'exactitude les lois impliquées dans les diagrammes d'allongement et de raccourcissement, et s'aider en cela des prévisions qui naissent de la connaissance préalable de certains faits physiques nécessaires. Par exemple, dans le cas présent, il semble évident que, quelle que soit la compression exercée sur le prisme, on ne peut la pousser jusqu'à en réduire la longueur à zéro. D'où il faut conclure que la droite AB est une asymptote à la courbe de compression.

Mais notre but n'est pas de rechercher les lois physiques de la compression et de l'allongement; c'est seulement de montrer d'une manière générale *dans quelles limites* on peut étendre les lois vulgairement admises dans l'art de la construction des machines.

49. Quelle que soit la matière sur laquelle on opère, l'expérience prouve : 1° que le diagramme d'allongement commence par une portion OD sensiblement rectiligne, et pour laquelle, par conséquent, les allongements croissent proportionnellement aux tensions ; 2° qu'il en est de même pour une portion OD′ de la courbe des compressions ; 3° que ces deux portions à peu près droites sont dans le prolongement l'une de l'autre et par conséquent appartiennent à une même courbe ; ce qui revient à dire que, entre les limites D et D′, la proportion entre les allongements et les efforts d'extension est la même qu'entre les raccourcissements et les efforts de compression; 4° qu'en dehors des limites D et D′ la courbure des diagrammes devient sensible ; 5° qu'enfin la pièce finit toujours par se briser en morceaux, de manière que la continuité du phénomène cesse.

50. Définitions. — La tension $\overline{CD}$, après laquelle les allongements croissent plus vite que les tensions, porte le nom de *coefficient de résistance à l'extension*. Nous l'appellerons R.

La tension $\overline{C'D'}$, après laquelle les raccourcissements croissent moins vite que les compressions, porte le nom de

coefficient de résistance à la compression. Nous l'appellerons R'.

51. Remarque importante. — Dans la pratique des constructions mécaniques on ne soumet pour ainsi dire jamais une pièce à des tensions supérieures aux coefficients de résistance. Il s'ensuit que la loi de proportionnalité des déformations aux tensions peut être admise pratiquement entre ces limites sans qu'il en résulte d'erreur préjudiciable.

Bien plus les praticiens les plus éclairés conseillent de calculer les dimensions des solides de résistance, de façon qu'en aucun point la tension ne puisse dépasser une fraction $\frac{R}{n}$ ou $\frac{R'}{n}$ du coefficient de résistance. Ce nombre n a reçu le nom de *coefficient de sécurité.* Il n'est presque jamais inférieur à 2, et on le fait quelquefois égal à 20; la valeur à adopter dépend de conditions purement pratiques relatives à chaque cas particulier. Il est toujours imprudent d'employer pour n de trop petites valeurs surtout lorsque l'on n'a pas fait d'essais directs sur les matériaux dont on fait usage et que l'on se fie aux renseignements des formulaires.

52. Puisque l'on ne pousse jamais la tension que bien en deçà des coefficients de résistance, on peut considérer la loi suivante comme applicable à toutes les constructions mécaniques.

Dans les limites adoptées pour les constructions mécaniques et comprises entre les deux coefficients de résistance, l'allongement par mètre courant est proportionnel à la tension par mètre carré; et le coefficient de proportionnalité est le même pour l'extension et la compression.

Cette loi s'exprime analytiquement par l'équation

$$P = Ei, \qquad (3)$$

dans laquelle le coefficient. introduit pour la rendre homogène, porte le nom de *coefficient d'élasticité longitudinale*, ou *module d'élasticité longitudinale.*

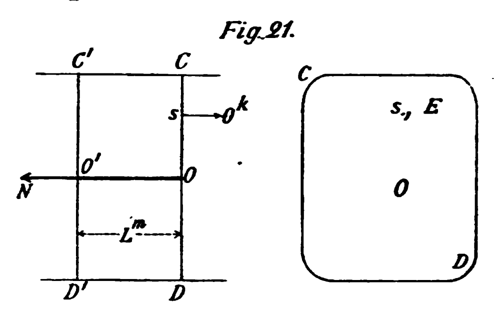
Si P est exprimé en kil. par mètre carré, il en est de même de E. Nous trouvons très reprochable la définition que l'on

donne quelquefois du coefficient d'élasticité E : la tension sous laquelle un corps prismatique homogène, soumis à un effort dans la direction de sa longueur, s'allongerait d'une quantité égale à sa longueur primitive, en supposant qu'un tel allongement soit possible. Les limites très resserrées entre lesquelles la loi ci-dessus énoncée est admissible, ne permettent pas d'adopter une telle définition, absurde en tout cas lorsqu'il s'agit de compression.

53. Remarque. — Lorsque l'on veut faire connaître la propriété caractéristique d'un corps sous le rapport de son élasticité longitudinale, on donne la valeur du coefficient E pour chacun de ses points. Si le corps est homogène, E est le même pour tous les points.

54. Problème I.—*Étant donnés un prisme élémentaire de longueur primitive* L^m, *de section* S^{mq}, *et la tension totale* N^k *à laquelle sa section* CD (fig 21), *est soumise, on demande de trouver la tension par mètre carré en un point quelconque de cette section.*

Fig. 21.



Appelons : s^{mq}, la section d'une fibre élémentaire quelconque dont l'élasticité est E ; θ, sa tension totale et $t = \frac{\theta}{s}$ sa tension par mètre carré cherchée ; i, l'allongement proportionnel, le même pour tous les points de la section, (n° 45, 1°). En vertu de l'équation (3), n° 52,

$$t = \mathrm{E}i,$$

d'où

$$\theta = st = s\mathrm{E}i.$$

Chacun des points de la section CD est donc soumis à une tension θ. Toutes les tensions θ sont parallèles et de même sens; elles ont donc une résultante unique égale à leur somme,

$$\Sigma\theta = \Sigma s E i = i \Sigma E s,$$

et dont la droite représentative passe par le centre d'élasticité O. Cette résultante doit faire équilibre à la tension totale N (n° 42), et par conséquent doit lui être égale :

$$N = i\Sigma E s. \qquad (4)$$

On en déduit successivement :

$$i = \frac{N}{\Sigma E s}, \qquad (5)$$

$$t = E \frac{N}{\Sigma E s}. \qquad (6)$$

La quantité $\Sigma E s$ porte le nom de *ressort longitudinal* de la section. Pour les corps homogènes, elle devient $E \Sigma s = ES$. En ce cas

$$t = \frac{N}{S}. \qquad (7)$$

55. Exemple. — La section donnée est carrée et $S = 0^{mq},01$; entre l'un des côtés et son parallèle l'élasticité va en augmentant uniformément depuis $E = 10,000,000,000$k. par mètre carré jusque $E_1 = 30,000,000,000$. La tension totale $N = 50,000^k$. On demande t et i.

$$\Sigma E s = \int_0^c E c dx = \int_0^c \left(E_0 + \frac{E_1 - E_0}{c} x\right) c dx = \frac{E_1 + E_0}{2} S = 200,000,000^k.$$

$$i = \frac{50,000}{200,000,000} = 0,00025, \text{ soit } {}^1/_4 \text{ millim. par m. courant.}$$

$$t_0 = 2,500,000\,; \qquad t_1 = 7,500,000 \text{ k. par m. q.}$$

56. Problème II. — *Étant donnée la tension totale* N^k *agissant sur la section considérée d'un prisme homogène, déterminer l'aire* S^{mq} *qu'il faut donner à cette section pour que la tension ne dépasse pas* t^k *par mètre carré.*

Dans l'équation (7) S est la seule inconnue, donc

$$S = \frac{N}{t}.$$

57. Exemples. — I. Une tige de fer soumise à une tension totale de 10,000 kil. doit avoir une section circulaire. Calculer au millimètre près le diamètre qu'il faut lui donner pour que la tension ne dépasse pas 5,000,000 kil. par m. q.

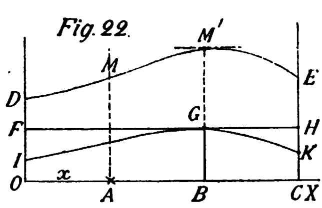
$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{10,000}{5,000,000}, \qquad \text{d'où } d = 0^m,051.$$

II. Un piston de $0^m,60$ de diamètre est soumis à une pression de 50,000 k. par m. q. Calculer au mill. près le diamètre de sa tige pour qu'elle ne supporte pas plus de 1,000,000 k. par m. q. — On trouve $d = 0^m,135$.

58. Du solide d'égale résistance à l'extension. — Soit un solide de résistance soumis, en chacune de ses sections normales, à une tension totale dont la grandeur varie d'une section à l'autre, suivant une loi donnée; on veut que le solide ait une forme et des dimensions telles qu'en aucun point la tension ne dépasse t^k par m. q.

Deux manières se présentent de résoudre la question suivant que l'on veut économiser la main-d'œuvre ou la matière.

A. Pour économiser la main-d'œuvre, on adoptera pour la pièce la forme géométriquement prismatique et on donnera à toutes les sections les mêmes dimensions qu'à celle où la tension totale est la plus grande. A cet effet il convient de tracer le diagramme des tensions totales (fig. 22), en prenant pour axe des x une direction perpendiculaire aux sections normales, de telle sorte que la position d'une section sera déterminée par son abscisse. Aux divers points O, A, B, C.... de l'axe on élève des perpendiculaires et, à partir de l'axe, sur chacune d'elles, on porte une longueur proportionnelle à la tension totale correspondante. Le trait continu D M M′ E qui relie les extrémités de ces droites est le diagramme des tensions totales. Dans la fig. 22, on voit que c'est à la section B que se trouve la plus grande tension totale. On calculera donc les dimensions de



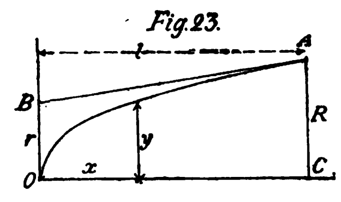
cette section d'après le problème II. Soit $\overline{BG}$ une hauteur proportionnelle à l'aire ainsi déterminée; les autres, égales, seraient représentées par les ordonnées de la droite FH.

Remarque et définition. — Supposons que, la pièce ayant été faite prismatique, la loi de variation de la tension totale, représentée par le diagramme D M M'E, subsiste, tandis que sa valeur absolue aille en croissant d'une manière continue. Dès lors la tension par mètre carré ira aussi en augmentant continuellement dans chaque section. Mais l'abscisse du point M' restant invariable, c'est la section située au point B qui sera toujours la plus fatiguée; si donc on pousse le procédé jusqu'à la rupture de la pièce, selon toute probabilité, c'est à la section B que la rupture se produira. C'est pour cette raison qu'on l'appelle *section dangereuse.*

B. Si l'on cherche à économiser la matière, on calculera les dimensions des sections successives d'après la formule (8), mais de telle façon que la tension maxima donnée t soit atteinte dans chaque section. Le solide que l'on obtiendra ainsi ne sera plus un prisme géométrique, mais on lui donne le nom de *prisme* ou *solide d'égale résistance à l'extension.*

59. Problème III. — *Déterminer le solide d'égale résistance à l'extension dans les cas suivants, où l'on suppose que la fibre moyenne du solide est rectiligne et que le solide est homogène.*

1. *La tension totale N, nulle à l'une des extrémités, va en croissant proportionnellement à la distance de la section à cette extrémité. Les sections seront circulaires, on obtiendra donc un solide de révolution ayant pour axe la fibre moyenne.*



Prenons (fig. 23) pour axe des x la fibre moyenne et pour origine l'extrémité où $N = 0$. Appelons y le rayon cherché de la section située à une distance x de l'origine, et R celui

de la section située à la distance l du même point, c'est-à-dire à l'autre extrémité de la pièce. On donne

$$N = px;$$

donc $\pi y^2 = \frac{px}{t}$; $\quad y^2 = \frac{p}{\pi t} x$;

$$\pi R^2 = \frac{pl}{t}; \qquad y^2 = R^2 \frac{x}{l}$$

La méridienne du solide est donc une parabole du second degré.

Comme forme approchée et plus facile à exécuter, on peut choisir un tronc de cône engendré par la droite AB touchante en A à la parabole et pour laquelle $R = 2r$.

2. *Même problème, mais la tension totale croît proportionnellement au carré de la distance* x.

Solution. $\pi y^2 = \frac{p}{t} x^2$; $\quad y = \pm x \sqrt{\frac{p}{\pi t}}$;

$$\pi R^2 = \frac{p}{t} l^2; \qquad y = \pm \frac{R}{l} x.$$

Le solide est un cône de révolution ayant son sommet à l'origine.

Fig. 24.

3. *Le solide de révolution est soumis à une compression* Q *kil. à sa base supérieure et il supporte en outre dans les autres sections le poids de la partie supérieure à raison de* δ *kil. par mètre cube* (fig. 24).

Solution. $\pi y^2 t = Q + \int_0^x \delta \pi y^2 dx.$

$\pi r^2 t = Q$, d'où la valeur de r.

Différentiant, puis intégrant, on trouve

$$\log \frac{y}{r} = \frac{\delta}{2t} x$$

et

$$y = r e^{\frac{\delta}{2t} x},$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Exercice. — *Même problème, mais la pièce a un creux cylindrique de rayon* r' *donné.*

Fig. 25.

4. *Un câble à section rectangulaire* y ε e′ (fig. 25) *est soumis à la section inférieure* l e *à un poids* Q^k*; sa section supérieure* l′ e′ *supporte en outre le poids du câble à raison de* δ *kil. par mètre cube. Le rapport des dimensions* y *et* ε *des sections rectangulaires est constant et égal à* n. *La tension maxima donnée est* t.

La solution rigoureuse conduit encore à une courbe logarithmique. En pratique, on adopte une solution approximative amplement suffisante en donnant la forme du trapèze aux deux sections longitudinales du câble. A cet effet, on calcule les dimensions l, e de la section inférieure par l'équation

$$let = Q,$$

ou

$$ne^2 t = Q;$$

et celles de la section supérieure, par l'équation

$$ne'^2 t = Q + \frac{\delta L}{3} n \left(e'^2 + ee' + e^2\right).$$

La tension t' en une section quelconque située à la distance x de l'extrémité inférieure du câble sera donnée par

$$n\varepsilon^2 t' = Q + \frac{\delta x}{3} n \left(\varepsilon^2 + \varepsilon e + e^2\right),$$

ou

$$\varepsilon = e + \frac{e' - e}{L} x.$$

Exemple. — On donne $Q = 4000^k$; $\delta = 1000$ k. par m. c. ; $n = 8$; $t = 1{,}000{,}000$ k. par m. q. ; $L = 500^m$.

On trouve $e = 0^m{,}02236$; $l = 0^m{,}179$; $e' = 0^m{,}0288$; $l' = 0^m{,}230$. Il est facile de voir que la tension t' est la plus petite à la section située à la distance $x = 230^m$ du bas. En ce point $\varepsilon = 0^m.02532$ et $t' = 984550$ k. par m. q. En aucun point du câble la tension n'est supérieure à la tension donnée t.

60. Sur les déformations. — Problème IV. — *Chercher l'extension totale d'un solide de résistance homogène, connaissant la tension totale à chaque section, dans le cas où la fibre moyenne est rectiligne.*

Prenant la fibre moyenne pour axe des x, appelons dx la longueur en mètres d'un prisme élémentaire à l'état primitif et situé à la distance x de l'extrémité de la pièce prise pour origine. Appelons l^m la longueur primitive totale du solide et $d\lambda$ l'allongement total du prisme élémentaire de longueur primitive dx : l'allongement proportionnel pour ce prisme sera

$$i = \frac{d\lambda}{dx};$$

et, en vertu de l'équation (5) n° 54,

$$i = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{N}{ES}.$$

D'où
$$\lambda = \frac{1}{E}\int_0^l \frac{N}{S}\,dx. \qquad (9)$$

61. Applications. — 1. *Dans le cas où* N *et* S *sont constants*,

$$\lambda = \frac{N}{ES}\,l = \frac{t}{E}\,l.$$

Exemple.— Le premier du n° 57 avec $l = 35^m$ et $E = 20.000.000.000$ k. par m. q., donne $\lambda = 0^m,00875$.

2. *Dans le cas où* N *est variable en même temps que* S, *mais où le solide a la forme d'égale résistance*, le rapport $\frac{N}{S} = t$ est encore constant et

$$\lambda = \frac{t}{E}\,l.$$

Cette formule peut être appliquée au cas du câble à section décroissante avec une approximation suffisante en pratique.

3. *Dans le cas où N est variable, mais où l'on a donne au solide la forme prismatique*, S est constant et

$$\lambda = \frac{1}{ES}\int_0^l N\,dx,$$

équation qui ne peut être résolue que dans les cas particuliers où l'on connaît la fonction N.

Exemple : Un câble à section uniforme et de longueur l supporte le poids Q^k à son extrémité inférieure, et en plus son propre poids à son extrémité supérieure S^{mq}. On exige que sa tension à la section supérieure S soit égale à t kil. par m. q.

On a pour calculer S :

$$St = Q + S l \delta.$$

Ensuite $\quad N = Q + S\delta x = S(t - \delta l + \delta x)$

d'où
$$\lambda = \frac{t - \frac{\delta l}{2}}{E} l.$$

Si l'on avait fait le solide d'égale résistance on aurait eu

$$\lambda' = \frac{t}{E} l.$$

Donc l'extension totale est plus petite pour le solide prismatique que pour le solide d'égale résistance sous les mêmes tensions.

62. Problème V. — *Evaluer le travail des forces moléculaires pendant la déformation, et le travail par kil. de matière en action.*

Pendant que le prisme élémentaire s'allonge de $d\lambda$, la tension des fibres passe de 0 à θ en augmentant de quantités égales pour des augmentations égales de l'allongement. Le travail de la tension variable est donc le même que si la tension avait été constante et égale à la moitié de sa valeur finale ou $\frac{\theta}{2}$. Donc, pour une section, ce travail est exprimé par $\frac{d\lambda}{2}\Sigma\theta = \frac{1}{2}N d\lambda$; et, pour la pièce entière, en remarquant que $d\lambda = \frac{N}{ES}dx$, et que $N = St$, on a

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l N\,d\lambda = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{N^2}{S}\,dx = \frac{1}{2E}\int_0^l t^2 S\,dx. \quad (10)$$

$$Q = \Delta \int_0^l S dx \qquad \text{et} \qquad T_1 = \frac{T}{Q} = \frac{1}{2\Delta E} \frac{\int_0^l t^2 S dx}{\int_0^l S dx}, \quad (10)$$

en appelant Δ le poids du mètre cube de la matière employée ; Q son poids total et T_1 le travail demandé par kil.

Applications. — I. Le solide est *prismatique*, mais la tension totale varie, sa plus grande valeur étant N'. En ce cas, t' étant la tension la plus grande, on a $S = \frac{N'}{t'}$ et

$$T_1 = \frac{1}{2\Delta E l} \int_0^l t^2 dx.$$

Si, en outre N était le même pour toutes les sections, on aurait $t =$ const. et $T_1 = \frac{t^2}{2\Delta E}$.

II. Le solide a la *forme d'égale résistance*. Il en résulte $t =$ const. et

$$T_1 = \frac{t^2}{2\Delta E}.$$

Remarque. — Le travail T_1, dans le cas du solide d'égale résistance, est plus grand que dans celui du solide prismatique soumis à la même tension totale variable N. En effet tous les éléments de la somme $\int t^2 dx$ ont, dans le solide d'égale résistance, la plus grande valeur qu'ils puissent acquérir dans le solide prismatique et qu'ils n'y ont qu'en un seul point, celui où N = N'. C'est de cette propriété que l'on tire parti lorsque l'on donne la forme d'égale résistance à des pièces destinées à subir des chocs ou à détruire de la force vive.

La même remarque pouvant se faire pour la flexion et la torsion, nous nous dispenserons de la répéter dans les chapitres suivants.

CHAPITRE III.

GLISSEMENT OU CISAILLEMENT SIMPLE.

63. Données d'expériences et conventions. — Rappelons (nº 45,2º) qu'une section normale d'un solide subit un glissement simple ou cisaillement simple, lorsqu'elle est sollicitée par une seule force appelée effort tranchant dont la droite représentative, située dans son plan, passe par son centre d'élasticité.

Des difficultés pratiques, compromettantes pour l'exactitude des résultats, ont empêché de déterminer par des expériences directes les lois du cisaillement. Mais les conclusions d'expériences indirectes, celles de la théorie et de la pratique des constructions, portent à admettre que les lois du cisaillement sont, dans les mêmes limites, les mêmes que celles de l'extension et de la compression. Nous admettrons donc que,

64. *Dans les limites adoptées pour les constructions et comprises entre les deux coefficients de résistance, le glissement par mètre courant de la longueur primitive de la fibre, est proportionnel à l'effort tranchant par mètre carré de la section.*

Soient : L^m, la longueur primitive du prisme élémentaire considéré, c'est-à-dire la distance indéfiniment petite entre deux sections normales consécutives; k^m, le déplacement égal et parallèle de tous les points de l'une de ces deux sections par rapport aux points homologues de l'autre considérée comme fixe; $\frac{k}{L} = \gamma$ sera le *glissement proportionnel* ou par mètre courant ; T^k, l'effort tranchant qui a produit ce glissement ; S^{mq}, l'aire de la section considérée supposée homogène ; $P = \frac{T}{S}$, l'effort tranchant par mètre carré.

La convention ci-dessus s'écrira

$$P = G\gamma, \tag{11}$$

G représentant un effort tranchant, exprimé en kil. par mètre carré, introduit pour rendre l'équation homogène, et qui porte le nom de *coefficient d'élasticité transversale*.

Pour toute substance il existe un rapport constant entre les deux coefficients d'élasticité. Pour les métaux employés dans les machines tels que le fer et l'acier, on estime que ce rapport est égal à 2,5, soit

$$E = 2{,}5\,G.$$

Il en résulte que le centre d'élasticité longitudinale coïncide avec celui d'élasticité transversale; et on l'appelle simplement *centre d'élasticité*.

Quant *au coefficient de résistance transversale*, ou *de résistance au cisaillement*, on l'estime généralement aux quatre cinquièmes du plus petit des deux coefficients de résistance à l'extension et à la compression.

65. Problème I. — *Étant donnés un prisme élémentaire de longueur primitive* L^m, *de section* S^{mq}, *ainsi que l'effort tranchant* T^k *auquel sa section est soumise, et le coefficient d'élasticité transversale* G *en chaque point, on demande de trouver la tension par mètre carré en un point quelconque de cette section.*

Appelons s, la section d'une fibre élémentaire quelconque dont l'élasticité est $G^{k/mq}$; θ^k, sa tension transversale et $t = \frac{\theta}{s}$ sa tension transversale par mètre carré; c'est-à-dire la quantité cherchée; γ, le glissement proportionnel, le même pour tous les points de la section. En vertu de l'équation (11) ci-dessus,

$$t = G\gamma,$$

d'où

$$\theta = st = sG\gamma.$$

Chacun des points de la section considérée est donc soumis à une tension θ^k, et toutes ces tensions sont parallèles et

de même sens; elles ont donc une résultante unique égale à leur somme, ou égale à

$$\Sigma\theta = \Sigma s G \gamma = \gamma \Sigma s G,$$

et dont la droite représentative passe par le centre d'élasticité O. Cette résultante doit faire équilibre à l'effort tranchant T (n° 42), et, par conséquent, doit lui être égale :

$$T = \gamma \Sigma s G. \qquad (12)$$

On en déduit successivement :

$$\gamma = \frac{T}{\Sigma G s}, \qquad (13)$$

$$t = G \frac{T}{\Sigma G s}. \qquad (14)$$

La quantité $\Sigma G s$ porte le nom de *ressort transversal* de la section. Pour les *corps homogènes*, elle devient $G \Sigma s = G S$, et, en ce cas,

$$t = \frac{T}{S}. \qquad (15)$$

66. Problème II. — *Étant donné l'effort tranchant* T^k *agissant sur la section considérée d'un prisme homogène, déterminer l'aire* S^{mq} *de cette section de manière que la tension ne dépasse pas* t^k *par mètre carré.*

Dans l'équation (15), S est la seule inconnue; donc

$$S = \frac{T}{t}. \qquad (16)$$

67. Exemple. — Deux tôles reliées par un rivet exercent sur lui un effort tranchant de 1800^k; on demande de calculer au millimètre près le diamètre qu'il faut donner au rivet pour qu'il ne supporte pas plus de 4,000,000 de kil. par m. q.

On trouve $d = 0^m,024$.

CHAPITRE IV.

FLEXION SIMPLE.

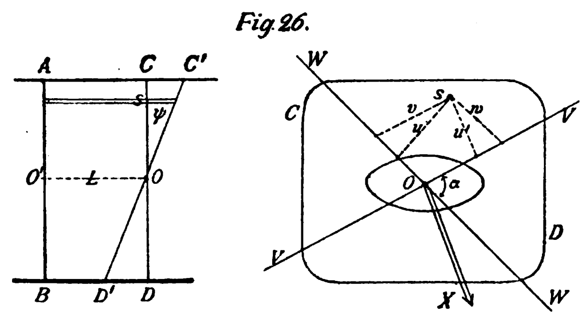
68. On dit qu'une section normale d'un prisme de résistance a éprouvé une flexion simple lorsqu'elle n'a subi, par rapport à la section indéfiniment voisine, qu'*une rotation autour d'une droite située dans son propre plan et passant par son centre d'élasticité.*

Les fibres situées dans l'une des deux régions dans lesquelles cette droite divise la section, se raccourcissent, tandis que les fibres situées dans l'autre région s'allongent. Les fibres dont les bases se trouvent sur cette droite de séparation, restent invariables, ne s'allongent pas et ne se raccourcissent pas. Pour cette raison, cette droite est appelée *axe neutre*; on dit encore *axe de flexion* et *axe d'équilibre*.

69. Problème I. — *Connaissant le moment fléchissant* X^{km} *qui fait éprouver, autour d'un axe donné, une flexion simple à une section donnée d'un solide de résistance, trouver la tension en kil. par m. carré en un point quelconque de cette section.*

Soient (fig. 26) : CD et AB, deux sections normales

Fig. 26.



indéfiniment voisines, à une distance L^m l'une de l'autre; C'D' la position de CD après que cette section a fléchi et tourné d'un angle Ψ autour de l'axe W W donné passant par

le centre d'élasticité O. Nous supposons donc cet axe connu par avance et la position du plan du couple X, inconnue et à déterminer. Dans ce but, traçons l'ellipse centrale d'inertie, puis le diamètre V V conjugué à W W et faisant avec ce dernier l'angle α. Appelons v et w les coordonnées d'une fibre s quelconque, par rapport à ces deux diamètres conjugués; u et u', les distances perpendiculaires de cette même fibre s à ces mêmes diamètres, de manière que

$$u = v \sin \alpha, \qquad u' = w \sin \alpha.$$

La fibre s étant tendue dans la direction des arètes du prisme, sa tension sera donnée, en vertu de l'équation (3), par

$$\theta = \frac{\Psi u}{L} \mathrm{E}s; \tag{17}$$

cette tension est positive ou négative, suivant la région à laquelle appartient la fibre s.

Toutes les tensions θ, étant parallèles, se composent ou bien en une résultante unique, ou bien en un couple unique. Si elles donnent lieu à une résultante unique, celle-ci est égale à leur somme algébrique ou à

$$\Sigma\theta = \frac{\Psi}{L} \Sigma \mathrm{E}su.$$

Mais $$\Sigma \mathrm{E}su = 0,$$

parce que (n° 24) c'est une quantité proportionnelle à la somme des moments des forces élastiques Es, par rapport à l'axe W W qui passe par le centre d'élasticité. Il en résulte que les tensions θ se composent en un couple unique qui, devant faire equilibre au couple donné X, lui est égal et opposé.

Reste à trouver le plan de ce couple. A cet effet, remarquons qu'un couple n'a aucune énergie par rapport à une droite quelconque de son plan, puisque la projection de son axe représentatif sur une telle droite est nulle. Si donc il existe dans la section C D une droite par rapport à laquelle la somme des moments des tensions θ est nulle, cette droite appartient nécessairement au plan du couple X et en est,

par suite, la projection sur le plan CD. Or, la droite VV, diamètre conjugé à l'axe neutre WW, jouit de cette propriété, car on a

$$\Sigma \theta u' = \frac{\Psi}{L} \sin^2 \alpha \, \Sigma E s v w = 0,$$

puisque $\Sigma E s v w$ est le produit d'inertie par rapport à deux axes conjugués de l'ellipse centrale d'inertie (voir n° 31). Donc VV est la projection du plan du couple X et une droite de la section CD, telle que OX, perpendiculaire à VV, en est l'axe représentatif.

Enfin, puisque le couple X et celui des tensions par rapport à l'axe neutre doivent se faire équilibre, on a

$$\Sigma \theta u = X \sin \alpha,$$

ou

$$\frac{\Psi}{L} \Sigma E s u^2 = X \sin \alpha;$$

d'où

$$\frac{\Psi}{L} = \frac{X \sin \alpha}{\Sigma E s u^2}, \tag{18}$$

et

$$t = \frac{\theta}{s} = E u \frac{X \sin \alpha}{\Sigma E s u^2}. \tag{19}$$

70. La quantité $\Sigma E s u^2$ porte le nom de *moment d'inflexibilité* de la section par rapport à l'axe WW. Pour les corps homogènes, elle devient $E \Sigma s u^2 = E I$, I étant le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe WW. Pour les sections homogènes, l'équation (19) qui sert à résoudre le problème I devient donc

$$t = u \frac{X \sin \alpha}{I}. \tag{20}$$

71. Il résulte de l'équation (20) que, pour les sections homogènes la fibre s a une tension d'autant plus grande qu'elle est plus éloignée de l'axe neutre; par suite, *la fibre la plus fatiguée est la plus éloignée de l'axe neutre.* Si donc nous appelons u' la distance à l'axe neutre de la fibre qui en est la plus éloignée, et f kil. par mètre carré, la tension de cette fibre la plus fatiguée, nous aurons :

$$f = \frac{X \sin \alpha}{I} u'. \tag{21}$$

72. La quantité $\frac{I}{u'}$ porte le nom de *module de flexion* de la section par rapport à l'axe neutre WW; et, comme X sin α est le moment de flexion estimé suivant le même axe neutre, on peut traduire l'équation (21) mise sous la forme suivante

$$\frac{I}{u'} = \frac{X \sin \alpha}{f} \qquad (22)$$

comme suit : *Dans le cas de la flexion simple et pour les sections homogènes, le module de flexion est égal au moment de flexion estimé par rapport a l'axe neutre et divisé par la tension de la fibre la plus fatiguée.*

73. Si le couple donné M^{km} agit dans un plan contenant l'un des axes principaux d'inertie, l'autre axe principal devient l'axe neutre, et, comme il est perpendiculaire au premier, $\sin \alpha = 1$ et les équations (19), (20) et (22) deviennent respectivement

$$t = Eu \frac{M}{\Sigma E s u^2}, \qquad (23)$$

$$t = \frac{M}{I} u, \qquad (24)$$

$$\frac{I}{u'} = \frac{M}{f}. \qquad (25)$$

74. Problème II. — *Étant donné le moment fléchissant* X^{km} *agissant seul sur une section d'un prisme homogène, ainsi que le plan dans lequel il agit; connaissant en outre la figure géométrique de la section, déterminer ses dimensions de manière que la tension de la fibre la plus fatiguée ne dépasse pas* f *kil. par mètre carré.*

Puisque la figure géométrique de la section est donnée, on connaît le rapport de ses dimensions, ou tout au moins une seule de ses dimensions reste inconnue. Par conséquent le module de flexion peut s'exprimer en fonction d'une seule de ces dimensions. Celle-ci sera donc la seule inconnue dans l'équation (22) qui servira à la déterminer.

75. Exemple. — Nous avons vu n° 44 que le solide fig. 4, n° 22, est soumis à un moment de flexion de 4250 km agissant dans un plan qui fait avec l'axe des y un angle de $151°55'$ et qui se projette sur le plan des yz suivant une droite que nous appelons VV. L'axe neutre **a**, par conséquent, la direction WW du diamètre conjugué à VV. Au n° 32, nous avons trouvé que la droite WW fait un angle de $25°6'$ avec l'axe des z et, par conséquent, l'angle $\alpha = 151°55' - 25°6' = 126°49'$. La section du solide considéré est rectangulaire (fig. 12) et $b = 2h$. Son moment d'inertie I par rapport à l'axe WW,

$$I = \frac{b^3 h}{12}\sin^2\beta' + \frac{bh^3}{12}\cos^2\beta' = 0{,}01604\, b^4.$$

La fibre la plus éloignée de l'axe neutre est au sommet A et sa distance à l'axe neutre WW est $u' = \frac{h}{2}\cos\beta' + \frac{b}{2}\sin\beta' = 0{,}4385\, b.$

On en déduit $\frac{I}{u'} = 0{,}03658\, b^3.$

Ensuite on a $X \sin\alpha = 4250 \times 0{,}8006 = 3403$ km.

La plus grande tension $f = 4\,000\,000$ k. par m. q.

On en déduit $0{,}03658\, b^3 = \frac{3400}{4\,000\,000},$

d'où $b^3 = 0{,}02325$; $b = 0^m{,}286$ et $h = \frac{b}{2} = 0^m{,}143.$

76. Autre exemple. — La section considérée est soumise à un couple de flexion de 2000 km. agissant dans un plan qui contient un des axes principaux ; on veut que la tension de la fibre la plus fatiguée ne dépasse pas 5,000,000 de kil. par mètre carré.

	$\frac{I}{u'}$	
a. Section circulaire pleine, d	$\frac{\pi d^3}{32}$	.... $d = 0^m{,}160$
b. Section circulaire creuse, $D = 2d$ ...	$\frac{15}{16}\frac{\pi}{32}D^3$	.. $D = 0\ ,164$
c. Section en losange, diagonales $D = 2d$.	$\frac{d^3}{12}$	..... $d = 0\ ,169$
d. Section carrée, plan du couple parallèle à un côté	$\frac{c^3}{6}$	..... $c = 0\ ,134$
e. Section carrée, plan du couple parallèle à une diagonale	$\frac{c^3}{6\sqrt{2}}$	... $c = 0\ ,151$
f. Section rectangulaire, $D = 2d$	$\frac{2d^3}{3}$	.... $d = 0\ ,085$

L'aire des sections est respectivement :

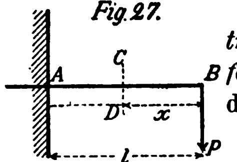
$a = 0^{mq},0201$, $d = 0^{mq},0180$,
$b = 0\ \ ,0158$, $e = 0\ \ ,0228$,
$c = 0\ \ ,0286$, $f = 0\ \ ,0145$,

77. Du solide d'égale résistance à la flexion. — Supposons que le moment de flexion agissant aux diverses sections d'un solide homogène varie suivant une loi donnée, et qu'il ait, par conséquent, pour l'une de ces sections, une valeur plus grande que pour les autres. Si l'on fait en sorte que, pour cette dernière section, la fibre la plus fatiguée n'ait que la tension maxima f voulue, on obtiendra les dimensions de cette section par l'une des formules (22) ou (25). Dans la suite, nous supposerons que le couple agit dans un plan qui contient l'un des axe principaux d'inertie, de manière que c'est la formule (25) que nous viserons seule.

Si l'on donne au solide la forme d'un prisme géométrique ayant pour base la section calculée par la formule (25), (afin, par exemple, d'économiser la main-d'œuvre), la fibre la plus fatiguée dans toutes les autres sections aura une tension moindre que f. Dans ce cas, si l'on suppose que les moments fléchissants croissent continuellement, mais en conservant entre eux toujours le même rapport, il arrivera un instant où la rupture aura lieu, et la rupture se produira nécessairement à la section où le moment est le plus grand. Telle est la raison pour laquelle cette section est dite *dangereuse*.

Si, au contraire, pour économiser la matière, on fait en sorte que, dans toutes les sections, la tension de la fibre la plus fatiguée soit la même et égale à f, le solide obtenu prendra le nom de *solide d'égale résistance à la flexion*.

78. Problème III. — *Faisant abstraction de l'effort tranchant, supposant le solide homogène, sa fibre moyenne primitivement rectiligne et le moment de flexion agissant dans un plan qui contient l'un des axes principaux d'inertie de chaque section, chercher la forme géométrique du solide d'égale résistance à la flexion dans les cas suivants :*



1. *Solide encastré à l'une de ses extrémités et sollicité à l'autre par une force unique* P *kil.* (fig. 27). Le moment de flexion est Px.

A. *Section circulaire pleine; rayon* y.

Module de flexion $\frac{\pi y^3}{4}$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi y^3}{4} &= \frac{Px}{f},\\ \frac{\pi R^3}{4} &= \frac{Pl}{f},\end{aligned}\right\} \quad y^3 = R^3 \frac{x}{l}.$$

Le solide de révolution a pour méridienne une parabole cubique. Forme approchée avec section dangereuse à l'encastrement, un tronc de cône de révolution engendré par la touchante en A à la méridienne et dont la petite base en B a pour rayon $\frac{2}{3}$ R.

B. *Section rectangulaire, dont la base est constante et égale à* b, *hauteur* 2 y.

Module de flexion $\frac{2}{3} by^2$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{3} by^2 &= \frac{Px}{f},\\ \frac{2}{3} bh^2 &= \frac{Pl}{f},\end{aligned}\right\} \quad y^2 = h^2 \frac{x}{l}.$$

Le profil longitudinal est une parabole du second degré. Forme approchée, un trapèze avec petite base égale à la moitié de la grande qui se trouve à l'encastrement.

C. *Section rectangulaire dont la hauteur* h *est constante. Base* $2y$.

Module de flexion $\frac{yh^2}{3}$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{yh^2}{3} &= \frac{Px}{f},\\ \frac{bh^2}{3} &= \frac{Pl}{f},\end{aligned}\right\} \quad y = b \frac{x}{l}.$$

Prisme dont la base est un triangle isocèle.

D. *Section rectangulaire dans laquelle le rapport de la base* 2y *à la hauteur* 2z *est constant et égal à* n.

Module de flexion $\frac{4}{3} y z^2 = \frac{4}{3} n z^3$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{3} n z^3 &= \frac{P x}{f}, \\ \frac{4}{3} n h^3 &= \frac{P l}{f}, \end{aligned}\right\} \quad z^3 = h^3 \frac{x}{l}.$$

Le profil longitudinal projeté sur le plan horizontal ou sur le plan vertical présente la forme d'une parabole cubique. On peut remplacer les projections par des trapèzes dont la petite base est égale aux deux tiers de la grande, et dans ce cas il y a une section dangereuse à l'encastrement.

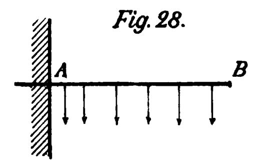


Fig. 28.

2. *Solide encastré à une extrémité et sollicité par une charge uniformément répartie le long de la fibre moyenne à raison de* p *kil. par mètre courant.* (Fig. 28.) Le moment de flexion est $\frac{p x^2}{2}$.

A. *Section circulaire pleine, rayon* y.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{4} &= \frac{p x^2}{2f}, \\ \frac{\pi R^3}{4} &= \frac{p l^2}{2f}, \end{aligned}\right\} \quad y^3 = R^3 \frac{x^2}{l^2}.$$

B. *Section rectangulaire dont la base est constante et égale à* b ; *hauteur* 2*y*.

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{3} b y^2 &= \frac{p x^2}{2f}, \\ \frac{2}{3} b h^2 &= \frac{p l^2}{2f}, \end{aligned}\right\}. \quad y^2 = h^2 \frac{x^2}{l^2}, \quad y = \pm h \frac{x}{l}.$$

C. *Section rectangulaire dont la hauteur* h *est constante. Base* $2y$.

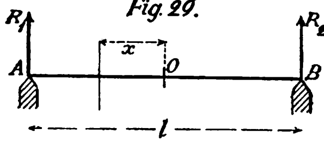
$$\left.\begin{array}{l} \frac{yh^2}{3} = \frac{px^2}{2f}, \\ \frac{bh^2}{3} = \frac{pl^2}{2f}, \end{array}\right\} \quad y = b\,\frac{x^2}{l^2}.$$

D. *Section rectangulaire dans laquelle le rapport de la base* 2y *à la hauteur* 2z *est constant et égal à* n.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{4}{3}\,nz^3 = \frac{px^2}{2f}, \\ \frac{4}{3}\,nh^3 = \frac{pl^2}{2f}, \end{array}\right\} \quad z^3 = h^3\,\frac{x^2}{l^2}.$$

Forme approchée : un tronc de pyramide dont la grande base, à l'encastrement, est un rectangle ayant pour base $2nh$ et pour hauteur $2h$; la petite base à l'extrémité libre de la pièce a pour dimensions $\frac{2nh}{3}$ et $\frac{2h}{3}$.

3. *Le solide repose sur deux appuis de niveau placés aux extrémités* A *et* B (fig. 29), *et supporte une charge verticale uniformément répartie sur toute la longueur* l^m *de la fibre moyenne, à raison de* p *kil. par m. courant.*



Comme il y a nécessairement équilibre entre les forces extérieures (n° 38), à cause de la symétrie, chacun des deux appuis doit supporter la moitié de la charge totale ou $\frac{pl}{2}$.

Il s'ensuit que le moment de flexion de la section CD située à la distance x^m du point O milieu de la pièce se compose du moment de la réaction au point A ou $\frac{pl}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$ et du moment, en sens contraire, de la charge uniformément répartie sur la longueur $\left(\frac{l}{2} - x\right)$ ou $p\left(\frac{l}{2} - x\right)\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$.

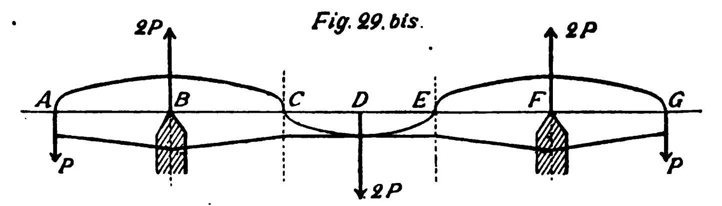
Donc $\quad M = \frac{p}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)\left(l - \frac{l}{2} + x\right) = \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right).$

Pour une section circulaire pleine de rayon y, on aurait :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{4} &= \frac{p}{2f}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right), \\ \frac{\pi Y^3}{4} &= \frac{p}{2f}\left(\frac{l^2}{4}\right), \end{aligned}\right\} \quad y^3 = Y^3\,\frac{l^2 - 4x^2}{l^2}.$$

Cet exemple suffit pour montrer comment on peut traiter les autres.

4. *Le solide repose sur deux appuis placés à des distances* c *égales des deux extrémités et il supporte une charge* 2P *en son milieu et une charge* P *à chaque extrémité. Sa section est circulaire pleine.* (Fig. 29 bis.)



Entre A et B, le moment $M_1 = Px$,

» B et D, » » $M_2 = -Px + 2Pc$.

La symétrie dispense de faire $x >$ AD ou $> \frac{L}{2}$.

Donc
$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{4} &= \frac{P}{f}x, \\ \frac{\pi R^3}{4} &= \frac{P}{f}c, \end{aligned}\right\} \quad y^3 = R^3\,\frac{x}{c}, \quad \text{entre A et B.}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{4} &= \frac{P}{f}(-x + 2c), \\ \frac{\pi R^3}{4} &= \frac{P}{f}c, \end{aligned}\right\} \quad y^3 = R^3\,\frac{-x + 2c}{c}, \quad \text{entre B et D.}$$

On voit qu'au point C où $x = 2c$, $y = 0$ et qu'au milieu $x = \frac{L}{2}$, R' est donné par $R'^3 = R^3\,\dfrac{-\frac{L}{2} + 2c}{c}$.

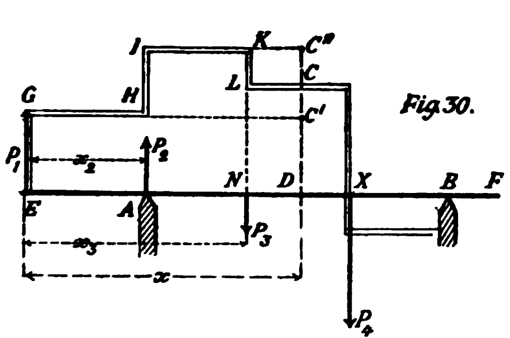
Forme approchée : tronc de cône AB ; rayon en A, $\frac{2}{3}$ R ; BC, le même tronc de cône placé en sens inverse ayant en C un rayon égal à $\frac{2}{3}$ R ; entre C et E, un cylindre ayant R′ pour rayon. Exemple essieu de wagon.

79. De la section dangereuse pour la flexion. — Nous entendons par là la section pour laquelle le moment de flexion est le plus grand ; nous faisons donc abstraction de tout effort tranchant et nous limitons la question au cas des solides géométriquement prismatiques et homogènes.

Dans le cas où un solide, reposant sur deux appuis, est primitivement rectiligne et supporte uniquement des charges normales à sa fibre moyenne et agissant toutes dans un même plan qui la contient, la recherche de la position de la section dangereuse et de la valeur du moment fléchissant en chaque point est facilitée par l'application du théorème suivant.

80. Théorème. — *Dans le cas où un solide homogène, primitivement rectiligne et reposant sur deux appuis de niveau, est soumis à des charges réparties d'une manière quelconque, mais toutes verticales et agissant dans un même plan qui contient la fibre moyenne, le moment fléchissant à une section quelconque est égal à l'aire de la portion du diagramme de l'effort tranchant comprise entre cette section et l'une des extrémités de la pièce.*

Soit (fig. 30) AB la fibre moyenne d'un solide reposant sur les appuis A et B et soumis à des forces verticales agissant dans le plan de la figure et que nous appelons P_1, P_2,... Les réactions des appuis sont déterminées par les deux relations qui expriment 1° que la somme algébrique de toutes les forces est nulle ; 2° que la somme de leurs moments par rapport à un point quelconque du plan est nulle également. Connaissant par là les réactions, on calcule : 1° l'effort tranchant T^k à une section CD quelconque, par cette condition qu'il est la résultante de tous les efforts normaux



extérieurs agissant depuis la section considérée jusqu'à l'une des extrémités E de la pièce, et 2° le moment fléchissant M^{km}, à la même section, par cette condition qu'il est égal à la somme des moments de toutes les forces extérieures agissant depuis l'extrémité E jusqu'à la section considérée, ces moments étant pris par rapport au centre d'élasticité de cette section.

Or, supposons que les charges P_1, P_2, P_3,... agissent en des points situés à des distances respectives x_1, x_2, x_3, .. de l'origine E, et que la section CD soit à une distance variable x de la même origine. Les réactions n'agissant pas autrement que les forces P, nous ne les désignerons pas par une lettre spéciale. D'après ce qui vient d'être dit, on a (*)

$$T = \Sigma_0^x P,$$

et

$$M = \Sigma_0^x P(x - x_n).$$

Si l'on place la section CD entre les points d'application de P_1 et de P_2, l'effort tranchant est simplement P_1 ; par conséquent, entre les points E et A, le diagramme de l'effort tranchant est une droite GH parallèle à l'axe EF. Si l'on place la section CD entre les points A et N d'application des forces P_2 et P_3, l'effort tranchant sera égal à la somme algébrique des forces extérieures P_1 et P_2; et, par suite, son

(*) $$\frac{dM}{dx} = \Sigma_0^x P = T.$$

diagramme sera une droite IK parallèle à l'axe EF et à une distance $P_1 + P_2$. Et ainsi de suite.... Le diagramme de l'effort tranchant sera donc composé de portions de verticales et d'horizontales, comme l'indique la double ligne EGHIKL.....

Si l'on considère comme positifs les efforts tranchants représentés par les ordonnées au-dessus de EF, il faudra considérer comme négatifs ceux qui sont représentés par des ordonnées situées en dessous de EF.

Quant aux moments celui de la force P_1 par rapport à la section CD est $P_1(x - x_1)$ (*) produit égal à l'aire du rectangle EGC'D. Le moment de P_2 est $P_2(x - x_2)$, produit égal à l'aire du rectangle HIC''C'. Le moment de P_3 est $- P_3(x - x_3)$, produit égal à l'aire KLCC'' qui doit être considérée comme soustractive. Ainsi de suite.. . La somme algébrique de ces moments,

$$P_1(x - x_1) + P_2(x - x_2) + P_3(x - x_3),$$

égale au moment fléchissant M, est donc représentée par l'aire EGHIKLCC'DE de la partie du diagramme comprise entre l'extrémité E de la pièce et la section CD.

Si les forces étaient réparties suivant une loi quelconque donnée, le diagramme de l'effort tranchant cesserait d'être composé de portions de droites verticales et horizontales ; ce seraient des droites inclinées ou des portions de courbes ; mais la propriété de l'aire d'être égale au moment fléchissant n'en subsisterait pas moins, car elle est indépendante de la figure géométrique de l'effort tranchant.

Cela posé, il est nécessaire d'admettre que les aires situées au-dessus de l'axe EF ont un signe contraire à celui des aires situées en dessous.

Nous avons choisi arbitrairement l'extrémité E de la pièce pour point de départ, nous pouvions prendre l'extrémité F, et le moment fléchissant que nous aurions trouvé aurait été le même, au signe près. Il en résulte cette propriété remar-

(*) En choisissant le point E pour origine, on a $x_1 = 0$.

quable de l'aire de l'effort tranchant, que toute section CD la divise en deux parties équivalentes, et encore que *la somme des aires positives du diagramme de l'effort tranchant est egale à la somme de ses aires négatives* ; ce qui n'est qu'un autre énoncé de la seconde des conditions d'équilibre entre les forces extérieures.

De là résulte que le diagramme de l'effort tranchant doit nécessairement rencontrer au moins une fois l'axe EF. S'il ne le rencontre qu'une fois, en X par exemple, *à ce point de rencontre se trouve la section dangereuse* ; car si l'on fait voyager la section CD depuis l'extrémité E de la pièce jusqu'en X, l'aire va en croissant jusqu'à ce point; mais au-delà de ce point, l'aire devenant négative, le déplacement de la section CD a pour résultat une augmentation de la partie soustractive du moment de flexion. Ce moment augmente donc jusque X et diminue à partir de ce point. Donc, au point X, il passe par un maximum de valeur.

Si le diagramme de l'effort tranchant rencontre l'axe EF, en plusieurs points, en chacun d'eux le moment fléchissant passe par un maximum de valeur. Mais parmi ces moments maximums, il y en a un plus grand que les autres et qui indique la position de la section dangereuse.

81. De l'encastrement. — L'encastrement a pour but de donner à l'extrémite de la fibre moyenne une direction déterminée. Pour produire cet effet, on y applique un couple appelé *couple d'encastrement*, dont la grandeur dépend des conditions dans lesquelles se trouve placée la pièce encastrée.

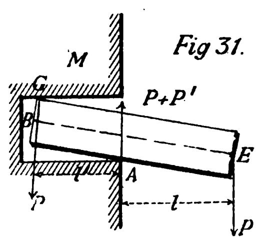


Fig 31.

Soit (fig. 31) une poutre EB, soumise à la force P^k appliquée à son extrémité libre E, et prolongée jusqu'en B dans un creux pratiqué dans le mur M. La force P tend à faire tourner la poutre autour du point A avec une énergie représentée par le moment Pl. Si l'on veut empêcher cette rotation et maintenir la poutre dans la position BE,

il est nécessaire d'opposer au couple Pl un autre couple égal $P'l'$ amené par la réaction du mur en G. Ce couple $P'l'$ est le couple d'encastrement. Son existence suppose que la poutre est prolongée dans le mur jusqu'à une certaine profondeur ; plus la longueur de la partie encastrée sera considérable, moindre sera la réaction qu'il faut appliquer au point G. Nous ferons remarquer en outre que le point A doit offrir une réaction égale à $P + P'$ et qui, par conséquent, dépend de la longueur de la partie encastrée. Pratiquement les réactions P' et $P + P'$ sont à peu près uniformément réparties le long de la partie encastrée.

82. Extension au cas de l'encastrement, de la propriété de l'aire du diagramme de l'effort tranchant. — Si l'on se donne la longueur de la partie encastrée, et si l'on connaît le moment d'encastrement, on pourra, sans inconvénient, considérer les forces du couple comme agissant aux extrémités de la partie encastrée. Alors il faudra regarder cette partie comme appartenant à la pièce, et uniquement soumise à ces forces jusqu'à la section d'encastrement non comprise, et tracer par cette considération le diagramme des efforts tranchants. Dans ce cas, la section dangereuse se trouvera encore à l'un des points où ce diagramme rencontre l'axe. Dans la figure 32, nous avons donné un exemple de ce procédé qui montre que la section dangereuse se trouve à l'encastrement même.

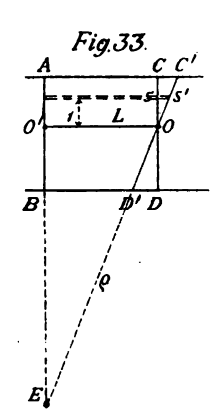
Fig. 32.

83. Remarque. — Si l'encastrement était trop court, la force P' deviendrait assez grande pour que la réaction $P + P'$ au point A obligeât à tenir compte de l'effort tranchant dans le calcul de la pièce ; ce qui ne rentre plus dans les hypothèses précédemment admises.

84. Recherche de l'élastique et des flèches de flexion. — La recherche des déformations que subit la fibre moyenne d'un solide soumis à la flexion, constitue l'un des problèmes les plus ardus de la résistance des matériaux. Mais

lorsqu'il ne s'agit que de la construction des machines, on peut, sans commettre d'erreur préjudiciable, introduire certaines hypothèses qui simplifient considérablement les questions et n'ôtent pas à leurs solutions l'utilité pratique. Nous n'aborderons ici que les problèmes susceptibles de ces simplifications.

Problème IV. — *Quelle est la courbure affectée par la fibre moyenne d'un prisme élémentaire homogène primitivement rectiligne, dont la section est soumise uniquement à un moment de flexion agissant dans un plan qui contient l'un des axes principaux d'inertie, dans l'hypothèse où la variation de longueur de la fibre moyenne élémentaire est négligeable.*



Soient (fig. 33), AB et CD deux sections indéfiniment voisines comprenant le prisme élémentaire considéré qui a une longueur primitive L^m conservée par la fibre moyenne OO' après flexion; C'D' la position nouvelle de la section CD après flexion, c'est-à-dire après qu'elle a tourné d'un petit angle Ψ autour de l'axe neutre projeté au point O, sous l'influence du moment de flexion M; E, le point de rencontre des deux droites O'B et OD' qui sont restées normales à la fibre moyenne, ce dont il faut conclure en toute hypothèse que $\overline{OE} = \rho$ est le rayon de courbure de la fibre moyenne au point O; s, la base d'une fibre élémentaire située à l'unité de distance de l'axe neutre O; s', sa position après flexion, et, par suite $\overline{ss'} = \Psi$, sa déformation totale.

L'allongement proportionnel de la fibre s sera donné, en vertu de l'équation (18) par

$$\frac{\Psi}{L} = \frac{M}{EI}.$$

Or, la similitude des triangles OO'E et $s's$O donne lieu à la proportion

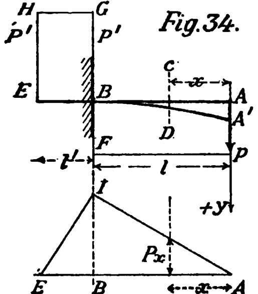
$$\frac{\overline{s'O}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{ss'}}{\overline{OO'}}, \text{ ou } \frac{1}{\rho}=\frac{\Psi}{L}.$$

Donc
$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Telle est l'équation qui permet de trouver la courbe affectée par la fibre moyenne fléchie, et qui porte le nom d'*élastique*. On la simplifie par cette considération que les déformations ne peuvent jamais être très-grandes en pratique, puisque, en aucun cas, les tensions ne peuvent atteindre les coefficients de résistance. S'il en est ainsi, le carré du coefficient angulaire de la touchante ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ est, dans les limites de la construction, négligeable en présence de l'unité, et l'équation précédente devient simplement

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}. \tag{26}$$

85. Applications. — *On demande de rechercher la courbe élastique dans les cas ci-après, où l'on suppose le solide primitivement rectiligne et homogène; abstraction est faite de l'effort tranchant.*



A. *Le solide primitivement prismatique, encastré à l'une de ses extrémités, est uniquement soumis à une force normale* P^k *appliquée à l'autre extrémité.* (La figure 34 donne les diagrammes de l'effort tranchant et du moment de flexion.)

Soient: AB la fibre moyenne primitive; A, l'origine des coordonnées; AB, l'axe des x; une perpendiculaire

pour axe des y. Le diagramme de l'effort tranchant montre qu'à la section CD, le moment de flexion est Px. Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}x,$$

et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

$$y = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} + Cx + C'\right).$$

Les deux constantes C et C′, introduites par l'intégration seront déterminées par les conditions de l'encastrement :

pour $x = l, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = 0.$

D'où $0 = \frac{l^2}{2} + C \text{ et } C = -\frac{l^2}{2}$:

$$0 = \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} + C' \text{ et } C' = \frac{l^3}{3}.$$

Donc l'équation de l'élastique est

$$y = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2x}{2} + \frac{l^3}{3}\right).$$

A $x = 0$ correspond $Y = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$.

On voit aisément qu'à mesure que x croît, l'ordonnée diminue jusque 0, valeur qu'elle atteint quand $x = l$. Donc la plus grande ordonnée est celle que nous avons désignée par Y; elle porte le nom de *flèche de flexion*.

B. *Même cas, mais au lieu d'un prisme géométrique, la pièce présente la forme d'égale résistance; les sections étant rectangulaires et à base constante.*

Soit $2z$ la hauteur de la section rectangulaire située à la distance x de l'origine; cette hauteur (n° 78, B) a été calculée par

$$\frac{I}{u'} = \frac{2}{3}bz^2 = \frac{M}{f} = \frac{Px}{f};$$

d'où $$z = \sqrt{\frac{3P}{2bf}}\sqrt{x}.$$

De l'équation $\frac{I}{u'} = \frac{M}{f}$, on déduit $\frac{M}{I} = \frac{f}{u'} = \frac{f}{z}$.

Donc $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{2bf^3}{3P}}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{2bf^3}{3P}}\left(2\sqrt{x} + C\right),$$

$$y = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{2bf^3}{3P}}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} + Cx + C\right).$$

Les mêmes conditions que précédemment donnent

$$C = -2\sqrt{l} \quad \text{et} \quad C' = +\frac{2}{3}l\sqrt{l}.$$

Donc $$y = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{2bf^3}{3P}}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - 2x\sqrt{l} + \frac{2}{3}l\sqrt{l}\right).$$

Le moment d'inertie à la section d'encastrement, le même que dans le cas précédent (A), est égal à

$$Pl\frac{z}{f} = \frac{Pl}{f}\sqrt{\frac{3Pl}{2bf}};$$

la constante sous le radical peut donc être remplacée par $\frac{Pl\sqrt{l}}{I}$. Donc

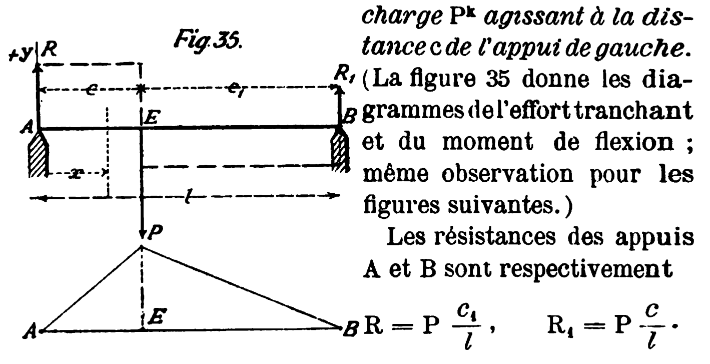
$$y = \frac{Pl\sqrt{l}}{EI}\left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - 2x\sqrt{l} + \frac{2}{3}l\sqrt{l}\right).$$

Et la flèche de flexion, valeur de y pour $x = o$ est

$$Y = \frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EI},$$

le double de la flèche obtenue dans le cas précédent du solide prismatique. (Voir n° 61.)

C. *Le solide donné est prismatique ($I = const.$); il repose sur deux appuis de niveau et est soumis à une*



charge P^k^ *agissant à la distance* c *de l'appui de gauche.* (La figure 35 donne les diagrammes de l'effort tranchant et du moment de flexion ; même observation pour les figures suivantes.)

Les résistances des appuis A et B sont respectivement

$$R = P\,\frac{c_1}{l}, \qquad R_1 = P\,\frac{c}{l}.$$

Le diagramme de l'effort tranchant fait voir qu'entre les points A et E le moment de flexion est

$$M = Rx = P\,\frac{c_1}{l}\,x\,;$$

et, entre les points E et B.

$$M_1 = Rc - R_1\,(x - c) = P\,\frac{c}{l}\,(l - x).$$

Il faut donc résoudre le problème pour chacune des deux portions du solide.

Entre A et E

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}\,\frac{c_1}{l}\,x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\,\frac{c_1}{l}\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

$$y = \frac{P}{EI}\,\frac{c_1}{l}\left(\frac{x^3}{6} + Cx + C'\right).$$

Entre E et B

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{EI}\,\frac{c}{l}\left(l - x\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\,\frac{c}{l}\left(lx - \frac{x^2}{2} + C_1\right),$$

$$y = \frac{P}{EI}\,\frac{c}{l}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 x + C'_1\right).$$

Les constantes seront déterminées par les conditions suivantes qui sont données : $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$. Pour $x = c$, l'ordonnée de la première courbe est égale à celle de la seconde, et la touchante est aussi commune aux deux courbes. On a donc

$$C' = 0,$$

$$\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} + C_1 l + C'_1 = 0, \text{ d'où } C'_1 = -\frac{l^3}{3} - C_1 l,$$

$$c_1\left(\frac{c^3}{6} + Cc\right) = c\left(\frac{lc^2}{2} - \frac{c^3}{6} + C_1 c - \frac{l^3}{3} - C_1 l\right),$$

$$c_1\left(\frac{c^2}{2} + C\right) = c\left(lc - \frac{c^2}{2} + C_1\right).$$

D'où
$$C = -\frac{c}{6}(2l - c),$$

$$C_1 = -\frac{2l^2 + c^2}{6},$$

$$C'_1 = \frac{lc^2}{6}.$$

Donc les équations précédentes deviennent :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\frac{c_1}{l}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{c(2l-c)}{6}\right],$$

$$y = \frac{P}{EI}\frac{c_1}{l}\left[\frac{x^3}{6} - \frac{c(2l-c)}{6}x\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI}\frac{c}{l}\left[lx - \frac{x^2}{2} - \frac{2l^2 + c^2}{6}\right],$$

$$y = \frac{P}{EI}\frac{c}{l}\left[\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{2l^2 + c^2}{6}x + \frac{lc^2}{6}\right].$$

Pour $c > c_1$, la touchante est horizontale dans la région AE en un point dont l'abscisse est

$$X = \sqrt{\frac{c(2l-c)}{3}} = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{c_1}{c}}.$$

Pour $c = c_1 \quad X = c.$

La flèche est la valeur de y correspondante à X :

$$-Y = \frac{P c_1 c^3}{9\sqrt{3} EI l}\left(1 + 2\frac{c_1}{c}\right)^{3/2}$$

Le moment est le plus grand au point E où sa valeur est.

$$M' = P\frac{c c_1}{l}.$$

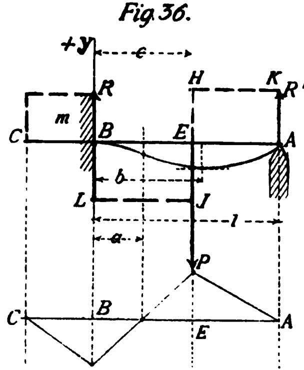


Fig. 36.

D. *Le solide donné, prismatique et horizontal repose sur un appui à l'une de ses extrémités* A (fig. 36), *et il est encastré à l'autre extrémité* B. *Il est chargé d'un poids* P^k *à la distance* c *de l'encastrement.*

Le diagramme de l'effort tranchant ne peut être complété qu'après le calcul des réactions R et R' aux appuis et du moment d'encastrement m. Toutefois, on peut tracer la figure en faisant en sorte que l'aire A E, augmentée de celle qui représente le moment m, forme une somme égale à l'aire négative E B, pourvu que A K représente R', H I représente P et L B représente R. En prenant le point B pour origine des axes des coordonnées, on a

Entre B et E

$$M = Rx - m,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}(Rx - m),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{Rx^2}{2} - mx + C\right),$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{Rx^3}{6} - \frac{mx^2}{2} + Cx + C'\right).$$

Entre E et A

$$M = Rc - m - R'(x - c),$$
$$M = Pc - m - (P - R)\,x.$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\,[Pc - m - (P - R)\,x].$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[(Pc - m)\,x - R'\frac{x^2}{2} + C_1\right].$$
$$y = \frac{1}{EI}\left[(Pc - m)\frac{x^2}{2} - R'\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_1\right].$$

Les conditions données sont : $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$; $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$; pour $x = c$, l'y et le $\frac{dy}{dx}$ de la portion BE de la courbe ont des valeurs égales à celles des mêmes quantités pour la portion EA. De plus, l'équilibre entre les forces extérieures donne lieu aux deux équations

$$P = R + R',$$
$$Rc - R'(l - c) - m = 0;$$

soit en tout 7 équations de condition qui feront connaître les 4 constantes C, C', C_1, C'_1, introduites par l'intégration, et les trois inconnues R, R' et m. Les résultats sont les suivants :

$$C = 0; \qquad C_1 = -\frac{Pc^2}{2}; \qquad R = P\,\frac{2l^3 - c^2(3l - c)}{2l^3};$$
$$C' = 0; \qquad C'_1 = \frac{Pc^3}{6}; \qquad R' = P\,\frac{c^2(3l - c)}{2l^3}.$$
$$m = Pc\,\frac{2l^2 - c(3l - c)}{2l^2};$$

Il y a un point d'inflexion là où le moment M s'annule, c'est-à-dire pour $Ra - m = o$. Si l'on fait $\frac{c}{l} = z$, on trouve

$$\frac{a}{l} = \frac{z^3 - 3z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 2}.$$

L'ordonnée est maxima à une distance b de l'origine donnée par

$$0 = \frac{Rb^2}{2} - mb + C,$$

si cette équation donne pour b une valeur plus petite que c, ou par

$$0 = (Pc - m)b' - (P - R)\frac{b'^2}{2} + C_1,$$

dans le cas contraire. Puisque $C = 0$, on a

$$b = \frac{2m}{R} = 2a \quad \text{ou} \quad b' = l - \sqrt{l^2 - \frac{P}{P-R}c^2}\ ;$$

d'où

$$\frac{b}{l} = 2\,\frac{z^3 - 3z^2 + 2z}{z^3 - 3z^2 + 2}\ ;$$

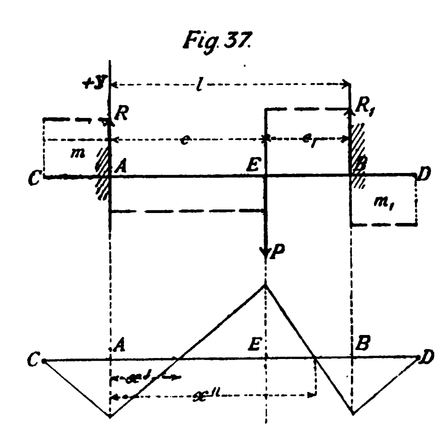
$$\frac{b'}{l} = 1 - \sqrt{\frac{l-c}{3l-c}} = 1 - \sqrt{\frac{1-z}{3-z}}.$$

Exemple.—Pour $z = 2$, on a $R = \frac{11}{16}P$; $R' = \frac{5}{16}P$; $m = \frac{3}{16}Pl$; $a = \frac{3}{11}l$; $b = 2a = \frac{6}{11}l > \frac{l}{2}$ est inadmissible ; donc on a

$$b' = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0{,}553\,l.$$

E. *Le solide donné, prismatique et horizontal, est encastré à ses deux extrémités et supporte une charge de* P[k] *appliquée à la distance* c *de l'une des extrémités.* (Fig. 37.)

Fig. 37.



Les résistances verticales aux sections d'encastrement sont $R = \frac{P c_1}{l}$, $R_1 = \frac{P c}{l}$.

En appelant m le moment d'encastrement en A, ce point étant pris comme origine, on aura

Entre A et E

$$M = P \frac{c_1}{l} x - m,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{P c_1}{l} x - m\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{P c_1}{2l} x^2 - m x + C_1\right),$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{P c_1}{6l} x^3 - \frac{m x^2}{2} + C_1 x + C_2\right).$$

Entre E et B

$$M = Pc - m - \frac{Pc}{l} x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(Pc - m - \frac{Pc}{l} x\right).$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(Pcx - mx - \frac{Pc}{2l} x^2 + C'_1\right),$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{Pcx^2}{2} - \frac{mx^2}{2} - \frac{Pc}{6l} x^3 + C'_1 x + C'_2\right).$$

Les constantes sont déterminées par les conditions suivantes :

Pour $x = 0$ on a $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

» $x = l$ » $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

» $x = c$ » $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ entre A et E $= \left(\frac{dy}{dx}\right)$ entre E et B.

Ce qui donne

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C'_1 = -\frac{Pcl}{2} + ml, \quad C'_2 = -\frac{Pcl^2}{6} + \frac{ml^2}{2}.$$

et $m = P \frac{c c_1}{2l}$.

Ainsi les dernières équations précédentes prennent la forme suivante :

Entre A et E

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{\mathrm{P}c_1}{l} \frac{x}{2} (x - c),$$

$$y = \frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{\mathrm{P}c_1}{l} \frac{x^2}{2} \left(\frac{x}{3} - \frac{c}{2}\right);$$

et entre E et B

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{\mathrm{P}c}{l} \left(lx - \frac{c_1}{2} x - \frac{x^2}{2} - \frac{cl}{2}\right),$$

$$y = \frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{\mathrm{P}c}{l} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{c_1 x^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{cl}{2} x - \frac{l^3}{12} + \frac{cl^2}{4}\right).$$

Il y a inflexion aux deux points dont les abscisses sont x' et x'', données par

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{P}c}{l} x' - m = 0, \qquad x' = \frac{c}{2},$$

$$(\mathrm{P}c - m) - \frac{\mathrm{P}c}{l} x'' = 0. \qquad x'' = l - \frac{c_1}{2}.$$

La flèche de flexion se produit au point pour lequel $\frac{dy}{dx} = 0$, ce qui donne ou bien $x = 0$ ou $x = c$, ou bien $lx - \frac{c_1}{2} x - \frac{x^2}{2} - \frac{cl}{2} = 0$, soit $x = l$ ou $x = c$.

Les solutions $x = 0$ et $x = l$ correspondent aux deux sections d'encastrement. Il ne reste donc que la seule solution $x = c$, qui donne

$$-\mathrm{Y} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{EI}} \frac{c_1 c^3}{12 l}.$$

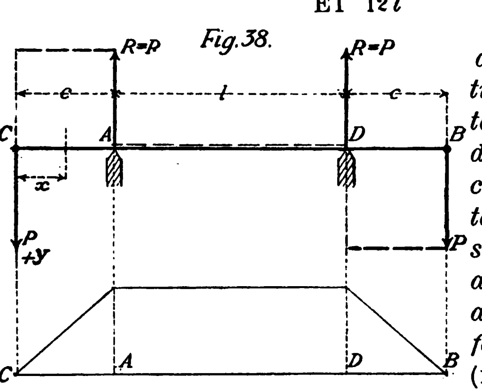


Fig. 38.

F. *Le solide donné, prismatique et horizontal, repose sur deux appuis placés à des distances égales* c *de ses extrémités auxquelles sont appliquées deux forces égales* P (fig. 38).

Les réactions des appuis sont égales à P chacune.

Le diagramme de l'effort tranchant montre que, entre

C et A, le moment de flexion est égal à Px,
A et B, » » » Pc,
B et D, » » » $P(2c+l-x)$.

On a donc

Entre C et A

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EI}\,x,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right),$$

$$y_1=\frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right).$$

Entre A et B

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Pc}{EI},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Pc}{EI}(x+C'_1),$$

$$y_2=\frac{Pc}{EI}\left(\frac{x^2}{2}+C'_1x+C'_2\right).$$

Entre B et D

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{EI}(2c+l-x),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P}{EI}\left[(2c+l)\,x-\frac{x^2}{2}+C''_1\right],$$

$$y_3=\frac{P}{EI}\left[(2c+l)\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+C''_1\,x+C''_2\right].$$

Les constantes sont déterminées par les conditions suivantes :

Pour $x=c$, $y_1=0$, $y_2=0$, $\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx}$,

Pour $x=c+l$, $y_2=0$, $y_3=0$, $\frac{dy_2}{dx}=\frac{dy_3}{dx}$,

qui donnent

$$C_1 = -\frac{c(c+l)}{2}, \qquad C'_1 = -\frac{l+2c}{2},$$

$$C_2 = \frac{c^2}{6}(3l+2c), \qquad C'_2 = \frac{c(l+c)}{2},$$

$$C''_1 = -\frac{1}{2}(3c^2+3cl+l^2),$$

$$C''_2 = \frac{c+l}{6}[(2c+l)^2 - 2cl].$$

La touchante est horizontale au milieu de la portion AB, et l'ordonnée a pour valeur en ce point

$$-Y_1 = \frac{P}{EI}\frac{cl^2}{8}.$$

Les ordonnées extrêmes ont pour valeur

$$Y_2 = \frac{P}{EI}\frac{c^2(3l+2c)}{6}.$$

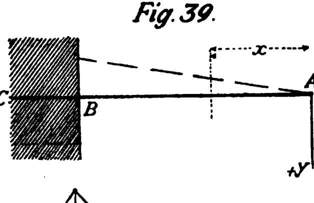
Les ordonnées extrêmes et celle du milieu seront égales si l'on fait

$$\frac{c}{l} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{15} - 3\right) = 0{,}2175 \text{ environ.}$$

Lorsque ce rapport est plus grand que 0,2175, les ordonnées extrêmes sont plus grandes que l'ordonnée moyenne.

A part le signe, l'inclinaison de la touchante aux extrémités est

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P}{2\,EI}\,c(c+l).$$



G. *Le solide prismatique est encastré à l'une de ses extrémités, libre à l'autre et soumis à une charge uniformément répartie de* p^k *par mètre courant.* (Fig. 39.)

Nous prenons A pour origine des coordonnées, AB pour axe des x et une perpendiculaire pour axe des y.

Le moment de flexion à une section quelconque est égal à $px\frac{x}{2} = p\frac{x^2}{2}$. On a donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2EI}x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} + C\right).$$

$$y = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} + Cx + C'\right).$$

Les constantes C et C' sont déterminées par les conditions suivantes : pour $x = l$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

Donc $\frac{l^3}{3} + C = 0$, $\frac{l^4}{12} + Cl + C' = 0$, | $C = -\frac{l^3}{3}$, $C' = \frac{l^4}{4}$,

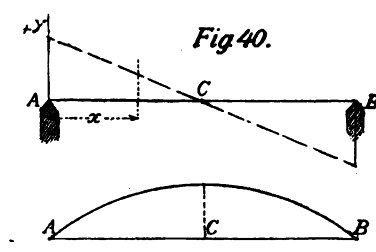
$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{6EI}(x^3 - l^3),$$

$$y = \frac{p}{24EI}(x^4 - 4l^3x + 3l^4).$$

La flèche $Y = \frac{pl}{EI}\frac{l^3}{8}$.

Le coefficient angulaire de la touchante au point A, à part le signe, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{pl^3}{6EI}$.

La section dangereuse est à l'encastrement.



H. *Le solide prismatique repose sur deux appuis de niveau et est soumis à une charge uniformément répartie de* p[k] *par mètre courant.* (Fig. 40.)

Le point A est pris pour origine des coordonnées

Les deux réactions sont égales à $\frac{pl}{2}$.

Le moment de flexion est visiblement égal à

$$M = \left(\frac{pl}{2} + \frac{pl}{2} - px\right)\frac{x}{2} = \frac{p}{2}x(l - x) = \frac{p}{2}(lx - x^2).$$

On a donc successivement :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}(lx - x^2),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{C}\right),$$

$$y = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{C}x + \mathrm{C}'\right).$$

Les conditions $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$ donnent

$$\mathrm{C} = -\frac{l^3}{12},\ \mathrm{C}' = 0,\ \text{et, par suite,}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{l^3}{12}\right),$$

$$y = \frac{p}{2\,\mathrm{EI}}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{l^3x}{12}\right).$$

La touchante est horizontale au milieu de la poutre, car $\frac{dy}{dx} = 0$ donne $(2x_0 - l)(2x_0^2 - 2lx_0 - l^2) = 0$, d'où $2x_0 - l = 0$, puisque le second facteur égalé à zéro donnerait $x_0 > l$.

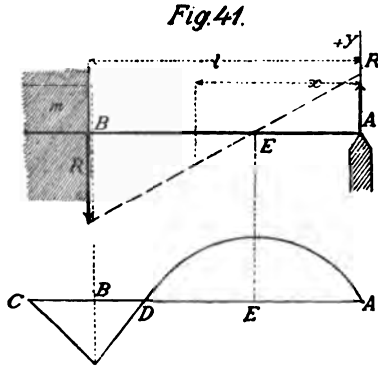
La flèche de flexion est $-\mathrm{Y} = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{\mathrm{EI}}$.

Le coefficient angulaire de la touchante aux extrémités, à part le signe, est

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{pl^3}{24\,\mathrm{EI}}.$$

I. *Le solide prismatique est encastré à l'extrémité B et repose sur un appui à l'extrémité A. Il est soumis à une*

Fig. 41.



charge uniformement répartie de p^k *par mètre courant.* (Fig. 41.)

Les réactions R et R', ainsi que le moment d'encastrement m sont, parmi les inconnues. De plus, l'intégration introduira deux constantes à déterminer. Il faut donc qu'il y ait cinq conditions données. Ces conditions sont

(1) $\quad R + R' = p\,l.$

(2) $\quad R' \times \overline{AE} - R \times \overline{BE} + 2\,m = 0.$

(3) $\quad y = 0$ pour $x = 0.$

(4) $\quad y = 0$ pour $x = l.$

(5) $\quad \dfrac{dy}{dx} = 0$ pour $x = l.$

Prenant le point A pour origine, on a successivement :

$$M = \frac{x}{2}\left(R' + R' - px\right) = R'x - \frac{px^2}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(R'x - \frac{px^2}{2}\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R'x^2}{2} - \frac{px^3}{6} + C\right),$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{R'x^3}{6} - \frac{px^4}{24} + Cx + C'\right).$$

La condition $y = 0$ pour $x = 0$ donne $C' = 0$.

» $\quad y = 0$ » $\quad x = l$ » $\quad C = -\dfrac{R'l^2}{6} + \dfrac{pl^3}{24}.$

On peut donc mettre $\dfrac{dy}{dx}$ sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{R'x^2}{2} - \frac{px^3}{6} - \frac{R'l^2}{6} + \frac{pl^3}{24}\right).$$

La condition $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = l$ donne $R' = \frac{3}{8} pl$.

La condition (1) donne ensuite $R = \frac{5}{8} pl$.

Et la condition (2), $m = \frac{pl^2}{8}$.

On peut encore mettre $\frac{dy}{dx}$ sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{EI} \frac{1}{48} (9\,lx^2 - 8\,x^3 - l^3),$$

Et l'on voit en divisant le second membre par $x - l$ que $\frac{dy}{dx}$ s'annule encore pour $x^2 - \frac{l}{8} x - \frac{l^2}{8} = 0$, ou

$$x_m = \frac{l}{16}\left(1 + \sqrt{33}\right) = 0{,}42125\, l.$$

La flèche de flexion est, en conséquence,

$$Y = \frac{p}{48\,EI}\, x_m \left(3lx^2_m - 2x^3_m - l^3\right).$$

Approximativement $-\,Y = \frac{pl^4}{185\,EI}$.

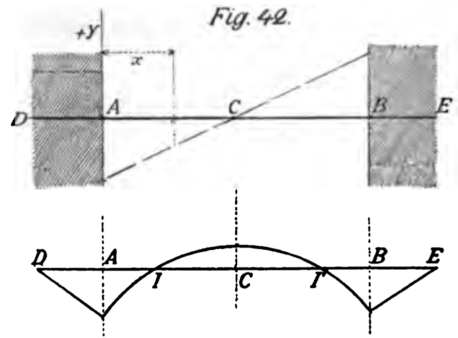
Il y a inflexion au point $x_i = \frac{3}{4}\, l$ où le moment de flexion passe par zéro.

Le moment de flexion passe par un maximum de valeurs en deux points, le point E et l'encastrement B. Au point E, il vaut

$$M_e = \frac{R' \times \overline{AE}}{2} = \frac{9}{128} pl^2\,;$$

à l'encastrement, $M_b = \frac{16}{128} pl^2 > M_e$.

C'est donc à l'encastrement que se trouve la section dangereuse.



K. *Le solide donné, prismatique, horizontal, encastré à ses deux extrémités, est soumis à une charge uniformément répartie de* p^k *par mètre courant* (fig. 42).

Les résistances verticales aux sections d'encastrement sont égales à $\frac{pl}{2}$. Et en appelant m le moment d'encastrement, le même aux deux extrémités, prenant le point A pour origine, on a successivement

$$M = \frac{px}{2}(l - x) - m,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl}{2}x - \frac{p}{2}x^2 - m\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl}{4}x^2 - \frac{p}{6}x^3 - mx + C\right),$$

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{pl}{12}x^3 - \frac{p}{24}x^4 - \frac{m}{2}x^2 + Cx + C'\right).$$

Les conditions propres à déterminer les constantes sont :

Pour $x = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où $C = C' = 0$.

" $x = l$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$, d'où $m = \frac{pl^2}{12}$.

La touchante est horizontale au point $x = \frac{l}{2}$ et la flèche

$$-Y = \frac{pl^4}{384\,EI}$$

Le moment passe par un maximum de valeur aux extrémités A et B et au milieu C. Aux points A et B, il a pour

valeur $\frac{pl^2}{12}$ et au point C, $\frac{pl^2}{24}$. C'est donc aux encastrements que se trouvent les sections dangereuses.

Le moment est nul et l'élastique a un point d'inflexion aux points où $$\frac{p}{2}(lx - x^2) - \frac{p}{12}l^2 = 0,$$
soit aux points I et I' ayant pour abscisses respectivement
$$x_1 = 0{,}296\,l,$$
$$x_2 = 0{,}704\,l.$$

L. *Le solide donné, prismatique et horizontal, repose sur deux appuis placés à des distances égales* c *de ses extrémités, et est soumis à une charge uniformément répartie de* p *kil. par mètre courant.* (Fig. 43.)

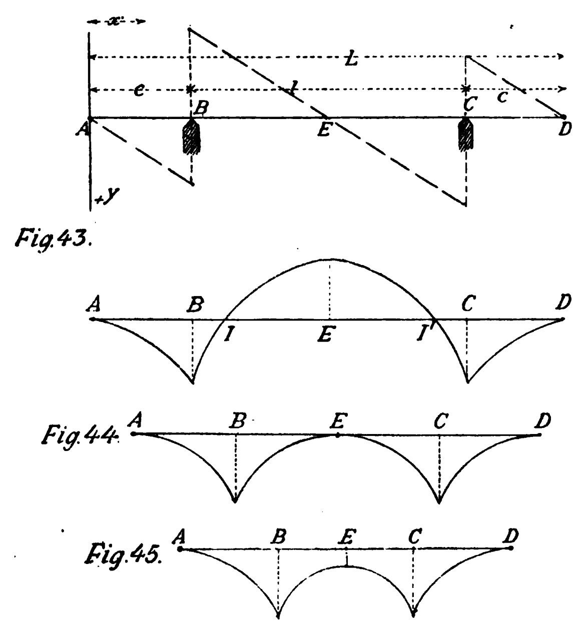


Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.

Chaque appui supporte la moitié de la charge totale $\frac{pL}{2} = \frac{p}{2}(2c + l)$. La symétrie permet de s'arrêter à la

recherche de l'élastique pour les deux portions AB et BC du solide seulement. Le point A est pris pour origine. L'indice 1 se rapporte à la portion AB, et 2 à la portion BC.

Entre A et B, on a $M_1 = \frac{px^2}{2}$ et, par suite,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2EI} x^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right),$$

$$y = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} + C_1 x + C'_1\right).$$

Entre B et C, on a $M_2 = \frac{p}{2}(x^2 - Lx + Lc)$, et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{2EI}\left(x^2 - Lx + Lc\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} + Lcx + C_2\right),$$

$$y = \frac{p}{2EI}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{Lx^3}{6} + \frac{Lcx^2}{2} + C_2 x + C'_2\right).$$

Les conditions qui déterminent les valeurs des quatre constantes introduites par l'intégration sont :

Pour $x = c$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ et $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2$;

Pour $x = L - c$, $y_2 = 0$.

Elles conduisent aux valeurs suivantes des constantes :

$$C_1 = \frac{L}{12}(L^2 - 6Lc + 6c^2),$$

$$C_2 = \frac{L^2}{12}(L - 6c),$$

$$C'_1 = -\frac{c}{12}(L^3 - 6L^2c + 6Lc^2 + c^3),$$

$$C'_2 = -\frac{c}{12}(L^3 - 6L^2c + 4Lc^2 + c^3) = -\frac{c}{12}(L - c)(L^2 - 5Lc - c^2).$$

La touchante à l'élastique est horizontale aux points pour lesquels $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = 0$, ce qui donne les trois valeurs de x,

$$x_1 = \frac{L}{2}, \qquad x_2 = \frac{L}{2}\left(1 \pm \sqrt{3\,\frac{L-4c}{L}}\right).$$

D'où l'on conclut que si L est $> 4c$, ou $l > 2c$, la courbe s'infléchit deux fois entre les appuis B et C et prend la forme figurée fig. 46,

Fig. 46.

pourvu que les valeurs de x_2 ne sortent pas des limites c et $L - c$, c'est-à-dire pourvu que

$$\frac{L}{2}\sqrt{3\,\frac{L-4c}{L}} \text{ soit } < \frac{L}{2} - c,$$

ce qui revient à $\quad \frac{L}{c} < 2 + \sqrt{6}$ ou $< 4{,}449$.

La courbe fig. 46 a été obtenue en faisant $L = 4{,}2\,c$. L'élastique coupe quatre fois l'axe AD aux points B et C pour lesquels $x = c$ et $x = L - c$, et aux deux points

$$x = \frac{L}{2}\left\{1 \pm \sqrt{5 - 20\,\frac{c}{L} - 4\left(\frac{c}{L}\right)^2}\right\} = \frac{L}{2} \pm 0{,}2236\,c.$$

Dans ce cas particulier $x_2 = \frac{L}{2} \pm 0{,}7937\,c$, soit $2{,}8937\,c$ et $1{,}3063\,c$. Les valeurs des constantes sont

$$C_1 = -0{,}546\,c^3, \qquad C_2 = -2{,}646\,c^3,$$
$$C'_1 = \frac{1{,}388}{3}\,c^4, \qquad C'_2 = \frac{3{,}488}{3}\,c^4.$$

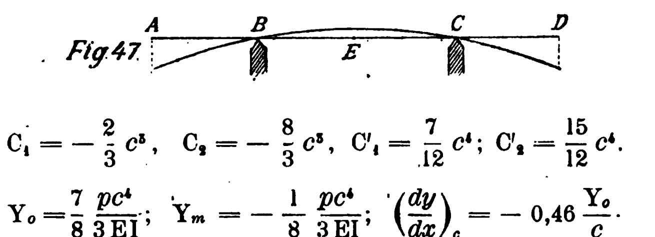
Les ordonnées extrêmes et maxima :

pour $x = 0$, $\qquad Y_0 = +\,0{,}694\,\frac{p\,c^4}{3\,EI}$.

pour $x = x_2$ $\qquad Y_2 = -\,0{,}042\,\frac{p\,c^4}{3\,EI}$,

pour $x = \frac{L}{2}$ $\qquad Y_m = +\,0{,}00756\,\frac{p\,c^4}{3\,EI}$.

Au cas particulier où $L = 4c$, la courbe obtenue (fig. 47) ne s'infléchit plus entre les appuis et l'on a :



$$C_1 = -\frac{2}{3}c^3, \quad C_2 = -\frac{8}{3}c^3, \quad C'_1 = \frac{7}{12}c^4; \quad C'_2 = \frac{15}{12}c^4.$$

$$Y_o = \frac{7}{8}\frac{pc^4}{3EI}; \quad Y_m = -\frac{1}{8}\frac{pc^4}{3EI}; \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_c = -0{,}46\frac{Y_o}{c}.$$

Enfin, si L est $< 4c$, la courbe accuse plus fortement les propriétés précédentes.

86. Problème V. — *Évaluer le travail total des résistances moléculaires pendant la déformation, et le travail par kilogramme de matière en action.*

Le travail élémentaire de la tension de l'une des fibres serait $\theta\Psi u$ si, dès l'origine, la tension était égale à θ. Mais cette tension, nulle quand Ψ est nul, augmente proportionnellement à cet angle. On peut donc, pour évaluer son travail, la supposer constante et égale $\frac{\theta}{2}$ pendant que son point d'application décrit le chemin Ψu. Il en résulte que, pour l'ensemble des fibres d'une section, le travail est exprimé par

$$\frac{1}{2}\Psi\Sigma\theta u \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\Psi X \sin\alpha. \tag{27}$$

Pour un solide homogène, primitivement rectiligne, l'axe neutre étant l'un des axes principaux d'inertie, on aura

$$\Psi = \frac{M}{EI}dx, \quad X\sin\alpha = M, \quad dT = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx, \quad \frac{I}{u'} = \frac{M}{f}$$

et, pour le solide entier, le travail

$$T = \frac{1}{2E}\int_o^l \frac{M^2}{I}dx = \frac{1}{2E}\int_o^l f^2\frac{I}{u'^2}dx. \tag{28}$$

Le poids Q de la pièce sera exprimé, par

$$Q = \Delta \int_0^l S\,dx,$$

S représentant l'aire de la section et Δ le poids du mètre cube. Enfin le travail par kil.

$$T_1 = \frac{T}{Q} = \frac{1}{2\Delta E} \frac{\int_0^l \frac{M^2}{I} dx}{\int_0^l S\,dx} = \frac{1}{2\Delta E} \frac{\int_0^l f^2 \frac{I}{u'^2} dx}{\int_0^l S\,dx} \qquad (29)$$

87. Applications. — *Chercher les travaux* T *et* T_1 *dans le cas d'un solide homogène, primitivement rectiligne, encastré à l'une de ses extrémités et soumis à l'autre à un effort unique* P *kil.*

On a $\qquad M = Px; \qquad \frac{I}{u'} = \frac{Px}{f};$

$$\frac{M^2}{I} = Pf\,\frac{x}{u'}; \quad T = \frac{Pf}{2E} \int_0^l \frac{x}{u'} dx.$$

A. *Le solide est prismatique.* — Dès lors S et I sont constants ; le moment I se calcule par l'équation (25),

$$\frac{I}{u'} = \frac{Pl}{f}, \text{ d'où } I = \frac{Plu'}{f}, \text{ et l'on a}$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{f}{4E} Pl \frac{l}{u'} = \frac{f^2}{4E} \frac{Il}{u'^2}. \\ Q &= \Delta S l. \end{aligned}\right\} \quad T_1 = \frac{f^2}{4\Delta E} \frac{I}{Su'^2}.$$

Pour une section circulaire, $\frac{I}{Su'^2} = \frac{1}{4}, \quad T_1 = \frac{f^2}{16\Delta E};$

" " rectangulaire, " $\frac{1}{3}, \quad T_1 = \frac{f^2}{12\Delta E}.$

Le solide rectangulaire est donc le plus avantageux.

B. *On a donné au solide la forme d'égale résistance.* — En ce cas, I, u' et S sont variables.

1° *Si la section est circulaire*, on a

$$\frac{\pi u'^3}{4} = \frac{Px}{f}, \qquad \frac{\pi r^3}{4} = \frac{Pl}{f}, \qquad \frac{x}{u'} = \frac{l^{1/3}}{r} x^{2/3};$$

$$T = \frac{Pf}{2E} \frac{l^{1/3}}{r} \int_0^l x^{2/3} dx = \frac{3}{10} \frac{f}{E} \frac{Pl^2}{r} = \frac{3}{40} \frac{f^2}{E} \pi r^2 l;$$

$$Q = \Delta \int_0^l \pi u'^2 dx = \frac{\Delta \pi r^2}{l^{2/3}} \int_0^l x^{2/3} dx = \frac{3}{5} \Delta \pi r^2 l.$$

$$T_1 = \frac{f^2}{8 \Delta E},$$ soit le double du solide prismatique.

2° *Si la section est rectangulaire.* — La base b étant constante, on a

$$\frac{4bu'^2}{6} = \frac{Px}{f}, \qquad \frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{f}, \qquad \frac{x}{u'} = 2 \frac{l^{1/2}}{h} x^{1/2}.$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{2}{3} \frac{f}{E} Pl \frac{l}{h} = \frac{f^2}{9E} bhl. \\ Q &= \frac{2}{3} \Delta bhl. \end{aligned}\right\} \quad T_1 = \frac{T}{Q} = \frac{f^2}{6 \Delta E}.$$

La hauteur $2u' = h$ étant constante, on a

$$\frac{zh^2}{6} = \frac{Px}{f}, \quad \frac{bh^2}{6} = \frac{Pl}{f}, \quad z = \frac{b}{l} x, \quad \frac{x}{u'} = \frac{2x}{h}.$$

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{f}{E} \frac{l}{h} Pl = \frac{f^2}{12E} bhl. \\ Q &= \Delta h \frac{b}{l} \int_0^l x\, dx = \frac{\Delta}{2} bhl. \end{aligned}\right\} \quad T_1 = \frac{f^2}{6 \Delta E}.$$

C'est le même résultat que le précédent.

Si le rapport de la base à la hauteur est constant, on obtient encore

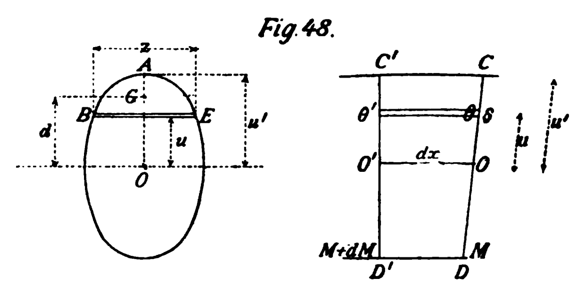
$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{10} \frac{f^2}{E} bhl, \\ Q &= \frac{3}{5} \Delta bhl, \end{aligned}\right\} \quad T_1 = \frac{f^2}{6 \Delta E}.$$

Si l'on compare ce résultat à celui que nous avons obtenu pour le solide prismatique, on remarque que le solide d'égale résistance donne un travail double pour la même quantité de matière.

88. De l'effort rasant. — Ce que nous dirons de l'effort rasant est restreint au cas d'une pièce géométriquement prismatique, homogène et primitivement rectiligne, soumise uniquement à des efforts parallèles normaux à la fibre moyenne et dont les droites représentatives sont toutes dans le plan qui contient cette fibre; de plus le plan de ces droites contient aussi l'un des axes principaux d'inertie des sections.

Considérons un prisme élémentaire (fig. 48) compris entre

Fig. 48.



les sections consécutives C D et C'D' situées à une distance primitive $\overline{OO'} = L = dx$ l'une de l'autre et soumises respectivement aux moments de flexion M et $M + dM$.

Appelons s^{mq} l'aire de l'ensemble des fibres situées à la distance u de l'axe neutre, de manière que

$$s = zdu.$$

Le moment M produit sur cet ensemble de fibres une tension

$$\theta = \frac{M}{I} su$$

(donnée par l'équation 24), dans la section CD. Et, dans la section C'D', le moment $M + dM$ produit sur ce même ensemble de fibres élémentaires une tension

$$\theta' = \frac{M + dM}{I} su.$$

La différence des tensions aux extrémités de ces fibres élémentaires est donc

$$\theta' - \theta = \frac{dM}{I} su.$$

Si l'on fait une somme de quantités analogues à $\theta' - \theta$ pour toutes les fibres comprises entre la fibre u et la fibre la plus éloignée de l'axe neutre, A, dont la distance à cet axe est u', on obtient ce que l'on appelle l'**effort rasant** à la fibre s située à la distance u de l'axe neutre.

Effort rasant à la distance u, $\quad \Sigma_u^{u'} (\theta' - \theta)$. (32)

89. On estime l'effort rasant en kil. par mètre carré de l'ensemble des fibres ayant pour longueur commune dx et pour largeur totale z. En appelant $R^{k/mq}$ l'effort rasant ainsi estimé, on aura

$$R z\, dx = \Sigma_u^{u'} (\theta' - \theta).$$

$$R = \frac{\Sigma_u^{u'} (\theta' - \theta)}{z\, dx}. \qquad (33)$$

90. Évaluation de l'effort rasant. — Appelons S la surface AEB; G son centre de gravité ; $d = \overline{GO}$, la distance de ce centre de gravité à l'axe neutre. Nous aurons

$$R = \frac{\frac{dM}{I} \Sigma_u^{u'} su}{z\, dx} = \frac{dM}{dx} \frac{Sd}{Iz}.$$

D'après ce que nous avons vu précédemment, l'effort tranchant

$$T = \frac{dM}{dx};$$

de plus S, d, z sont des fonctions de u et par suite

$$\frac{Sd}{z} = f(u).$$

Donc $$R = \frac{T}{I} \cdot f(u). \qquad (34)$$

91. Remarques. — I. Dans chacune des sections CD de la pièce, il y a une valeur de u qui rend R un maximum. Si u_1 est cette valeur, on l'obtient par l'équation

$$\frac{df(u)}{du} = 0$$

et on a
$$R_m = \frac{T}{I} f(u_1). \qquad (35)$$

II. Dans les sections CD successives, l'effort tranchant T change de valeur ; T est une fonction de x. Donc, puisque la pièce est prismatique, que $f(u_1)$ et I sont par suite constants, parmi les efforts rasants maximums (R_m) dans les sections consécutives, il y en a un qui est plus grand que tous les autres ; c'est celui pour lequel l'effort tranchant T a sa plus grande valeur T_1 ; en l'appelant R_1, on a

$$R_1 = \frac{T_1}{I} f(u_1). \qquad (36)$$

92. Applications. — I. *Le solide donné est encastré à l'une de ses extrémités et soumis à l'autre à une force unique* P. *Sa section est rectangulaire avec les dimensions* b *et* h.

On a
$$M = Px, \qquad T = P.$$

$$S = \left(\frac{h}{2} - u\right) b; \quad d = \frac{h}{2} - \frac{\frac{h}{2} - u}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + u\right);$$

$$z = b; \quad I = \frac{bh^3}{12};$$

$$f(u) = \frac{Sd}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - u^2\right); \qquad u_1 = 0;$$

$$R = \frac{6P}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - u^2\right);$$

$$R_m = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}; \qquad R_1 = R_m = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}.$$

II. *Même cas, mais le solide est soumis à une charge uniformément répartie de* p *kil. par mètre courant de la fibre moyenne, dont la longueur est* l.

En ce cas $T = px$.

$$R_m = \frac{3}{2}\frac{px}{bh}; \qquad R_1 = \frac{3}{2}\frac{pl}{bh}.$$

C'est à l'encastrement que l'effort rasant maximum, celui de la fibre moyenne, est donc le plus grand.

III. *Mêmes cas, mais la section est circulaire pleine.*

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 + u^2 = r^2.$$

$$\frac{z}{2} = r\cos\alpha; \qquad u = r\sin\alpha. \qquad du = r\cos\alpha\, d\alpha.$$

$$\Sigma_u^{u'} su = \int_u^{u'} z\,du\,u = \int^{\frac{\pi}{2}} 2r^3\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha = -\frac{2r^3}{3}\Big[\cos^3\alpha\Big]^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Sigma_u^{u'} su = Sd = \frac{2}{3} r^3 \cos^3\alpha.$$

$$\frac{Sd}{z} = \frac{r^2}{3}\cos^2\alpha = f(u).$$

Maximum de $f(u)$ ou $f(u_1) = \frac{r^2}{3}$, pour $\alpha = 0$ et $\cos\alpha = 1$.

Donc $$R_m = \frac{T}{I}\frac{r^2}{3} = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi r^2}.$$

Pour T = P = const., on a $R_1 = \frac{4}{3}\frac{T}{\pi r^2}$.

Pour $T = px$ $\qquad R_1 = \frac{4}{3}\frac{pl}{\pi r^2}$.

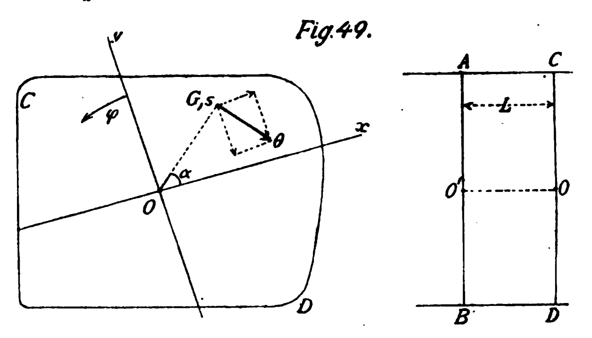
CHAPITRE V.

TORSION SIMPLE.

93. Un prisme élémentaire éprouve uue torsion simple lorsque l'une de ses sections tourne relativement à sa voisine autour d'un axe passant par son centre d'élasticité et perpendiculaire à son plan.

94. Problème I. — *Connaissant le moment de torsion* M^{km} *qui fait éprouver une torsion simple à une section donnée d'un solide de résistance, trouver la tension en kil. par m. carré en un point quelconque de cette section.*

Soient (fig. 49) : CD et AB, deux sections normales indé-



finiment voisines, à une distance L^m l'une de l'autre; OO' l'axe de torsion, O le centre d'élasticité de la section CD; φ l'angle dont la section CD a tourné par rapport à sa voisine; s^{mq}, l'aire d'une fibre élémentaire quelconque dont la position dans la section est déterminée par ses coordonnées x et y par rapport à deux axes orthogonaux passant par le centre d'élasticité; ρ la distance de la fibre s au centre d'élasticité; et α l'angle que le rayon ρ fait avec l'axe des x de manière que

$$x = \rho \cos \alpha \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \alpha.$$

La base de la fibre s se déplace d'une longueur $\varphi \rho$ suivant une perpendiculaire à la direction du rayon ρ; son glisse-

ment proportionnel est donc $\frac{\varphi\rho}{L}$ et. par suite, sa tension en sens contraire du glissement est

$$\theta = \frac{\varphi\rho}{L} G s.$$

Les tensions θ des diverses fibres qui composent la section s'exercent suivant toutes les directions possibles dans son plan. Elles sont donc réductibles soit à une résultante unique, soit à un couple unique. Si c'est le premier cas qui se présente, pour obtenir la valeur de la résultante, il faudra décomposer chaque tension θ en deux forces dirigées parallèlement aux deux axes coordonnés

$$\frac{\varphi}{L} G s \rho \sin\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi}{L} G s y,$$

et

$$\frac{\varphi}{L} G s \rho \cos\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi}{L} G s x;$$

puis faire la somme des composantes qui ont la même direction,

$$\frac{\varphi}{L} \Sigma G s y \quad \text{et} \quad \frac{\varphi}{L} \Sigma G s x.$$

Ces deux sommes seraient les composantes orthogonales de la résultante unique. Mais elles sont nulles puisqu'elles sont proportionnelles à la somme des moments des tensions élastiques par rapport à des axes passant par le centre d'élasticité (n° 24).

Il en résulte que le système des forces θ est réductible à un couple unique qui doit faire équilibre au couple donné M^{km}. En d'autres termes, la somme des moments des tensions θ par rapport à l'axe OO′ est égale à M.

Donc

$$M = \Sigma\theta\rho = \frac{\varphi}{L} \Sigma G s \rho^2,$$

et on en déduit

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{M}{\Sigma G s \rho^2}, \tag{37}$$

et

$$t = \frac{\theta}{s} = \frac{M}{\Sigma G s \rho^2} G \rho. \tag{38}$$

95. La quantité $\Sigma G s \rho^2$ porte le nom de *moment d'intorsibilité* de la section. Pour les corps homogènes, elle devient $G \Sigma s \rho^2 = G I_0$, expression dans laquelle I_0 est le moment d'inertie polaire de la section par rapport au centre O d'élasticité.

Pour les sections homogènes, l'équation (38) qui sert à résoudre le problème 1 devient donc

$$t = \frac{\theta}{s} = \frac{M}{I_0} \rho. \qquad (39)$$

96. Il en résulte, pour ce dernier cas, que la tension d'une fibre est d'autant plus grande que cette fibre est plus éloignée de l'axe de torsion. *La fibre la plus fatiguée est donc celle qui est la plus éloignée du centre d'élasticité.* Appelons r la valeur la plus grande de ρ et t' la tension de la fibre la plus fatiguée, nous aurons

$$t' = M \frac{r}{I_0}, \qquad (40)$$

et ainsi

$$\frac{I_0}{r} = \frac{M}{t'}. \qquad (41)$$

La quantité $\frac{I_0}{r}$ porte le nom de *module de torsion* de la section donnée. L'équation (41) se traduit comme suit : *Dans le cas de la torsion simple et pour les sections homogènes, le module de torsion est égal au moment de torsion divisé par la tension de la fibre la plus fatiguée.* L'équation (41) servira à résoudre le problème suivant :

97. Problème II. — *Étant donnés le moment de torsion agissant seul sur une section d'un prisme homogène, et la forme géométrique de cette section, déterminer les dimensions de la section de manière que la tension de la fibre la plus fatiguée ne dépasse pas* t^k *par mètre carré.*

Puisque la forme géométrique de la section est donnée, on connaît le rapport de ses dimensions, ou tout au moins il ne reste d'inconnu qu'une seule des dimensions. Par conséquent le module de torsion peut s'exprimer en fonction de la seule dimension inconnue. Celle-ci sera donc déterminée par l'équation (41).

98. Exemple. — La section circulaire pleine d'un solide est soumise à un moment de torsion de 300 km.; on veut que la tension ne dépasse pas 4 000 000 kil. par mètre carré. Calculer le diamètre d de la section, l'angle de torsion par mètre courant et l'arc de torsion par mètre courant à la circonférence extérieure, sachant que $G = 8\ 000\ 000\ 000$ kil. par m. q.

Le module de torsion d'une section circulaire pleine est $\frac{\pi d^3}{16}$.

Donc $\frac{\pi d^3}{16} = \frac{300}{4\ 000\ 000}$; d'où $d = 0^m,073$ au millimètre près.

L'angle de torsion par mètre courant $\frac{\varphi}{L} = \frac{300 \times 32}{G \pi d^4} = 0,013.$

L'arc de torsion à l'extérieur de la pièce, $0,013 \times \frac{0,073}{2} = 0^m,0005$ environ.

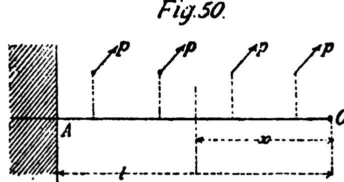
99. Remarque sur le moment d'inertie polaire. — On a visiblement
$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$
d'où
$$\Sigma s\rho^2 = \Sigma s x^2 + \Sigma s y^2, \quad \text{ou} \quad I_0 = I + I'.$$

Pour tous les polygones réguliers et les figures symétriques généralement employées pour les pièces soumises à une torsion simple, l'ellipse centrale d'inertie est réduite à un cercle et les deux moments d'inertie I et I' sont égaux. Pour ce genre de sections, on a donc
$$I_0 = 2I, \qquad (42)$$
relation qui facilite la recherche des moments d'inertie.

100. Du solide d'égale résistance à la torsion. — Lorsque le moment de torsion varie d'une section à l'autre d'un solide prismatique et homogène, il y a nécessairement une *section dangereuse* à la torsion, celle pour laquelle le moment de torsion est le plus grand, comme dans le cas de la flexion. Si, au lieu de faire le solide prismatique, on lui donne une forme telle qu'à toutes les sections la tension de la fibre la plus fatiguée soit la même, le profil longitudinal de la pièce sera celui d'*égale résistance à la torsion*.

Problème III. — *Faisant abstraction de tout effort autre que celui de torsion, supposant le solide homogène et sa fibre moyenne primitivement rectiligne; étant donné le moment de torsion à chaque section du solide, on*

demande de chercher la forme géométrique du solide d'égale résistance dans les cas suivants, où l'on suppose que la section doit être circulaire pleine.



1. *Le solide est encastré à l'une de ses extrémités* A (fig. 50) *et soumis sur toute sa longueur à une charge de* p^k *par mètre courant appliquée à* R^m *de distance de la fibre moyenne* AO *et perpendiculairement à cette fibre.*

Prenant pour origine l'extrémité libre O de la fibre moyenne, appelant y le rayon de la section située à x^m de distance du point O, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{2} &= \frac{pxR}{t}, \\ \frac{\pi \rho^3}{2} &= \frac{plR}{t}, \end{aligned}\right\} \quad \frac{y^3}{\rho^3} = \frac{x}{l},$$

équation d'une parabole cubique.

On obtient une forme approchée, convenable en pratique, en substituant à la génératrice parabolique la touchante dont l'ordonnée en A est ρ et l'ordonnée en O, $\frac{2}{3}\rho$.

2. *Même cas; mais la force uniformément répartie de* p^k *par mètre courant agit au bout d'un bras de levier qui va croissant uniformément depuis zéro au point* O *jusque* R^m *au point* A.

On a $$M = \int_0^x p\,dx \,.\, x\frac{R}{l} = \frac{pR}{2l}x^2.$$

D'où $$\left.\begin{aligned} \frac{\pi y^3}{2} &= \frac{pR}{2lt}x^2, \\ \frac{\pi \rho^3}{2} &= \frac{pR}{2lt}l^2, \end{aligned}\right\} \quad \frac{y^3}{\rho^3} = \frac{x^2}{l^2}.$$

La forme pratique approchée est un tronc de cône dont le rayon à la petite base est égal au tiers du rayon ρ de la grande base.

Remarque. — Dans les deux cas précédents, si l'on substitue la forme approchée à la forme idéale, il y a une section dangereuse à l'encastrement.

101. De l'angle de torsion. — L'angle de torsion ou, pour mieux dire, l'arc de torsion mesuré à un mètre de distance de l'axe de torsion, pour une fibre de longueur primitive dx ($= L^m$), est donné par la formule (37),

$$\varphi = \frac{M}{GI_0}\,dx.$$

Pour une longueur déterminée l, l'arc de torsion à un mètre de l'axe sera donc

$$\Phi = \int_0^l \frac{M}{GI_0}\,dx. \qquad (43)$$

102. Problème IV. — *Chercher l'angle ou l'arc de torsion dans les cas suivants, où l'on suppose la fibre moyenne primitivement rectiligne et homogène et soustraite à toute action autre que celle qui produit la torsion.*

1. *Le solide est encastré à une extrémité et soumis à l'autre à un moment de torsion* M = PR; *il est prismatique.*

M et I_0 sont constants ainsi que G. On a donc

$$\Phi = \frac{PR}{GI_0}\,l.$$

La section dangereuse est à l'encastrement et I_0 a dû être calculé par l'équation

$$\frac{I_0}{r} = \frac{PR}{t};$$

on peut donc encore écrire

$$\Phi = \frac{t}{Gr}\,l.$$

Donc l'arc de torsion pour la fibre fatiguée est

$$\Phi r = \frac{t}{G}\,l.$$

2. *L'effort de torsion est uniformément réparti à raison de* p^k *par mètre courant et est appliqué au bout d'un bras de levier constant* R; *le solide est prismatique.*

$$\Phi = \frac{pRl^2}{2GI_0} = \frac{t}{2Gr}\,l, \qquad \Phi r = \frac{t}{2G}\,l.$$

3. *Même cas, mais le solide a la forme d'égale résistance à section circulaire.*

Si r est le rayon de la plus grande base, on a

$$y = 2r\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{M}{I_0} = \frac{2t}{y}; \quad \Phi = \frac{1}{G}\int_0^l \frac{t\,l^{\frac{1}{3}}}{r}\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{t}{Gr}\,l.$$

$$\Phi r = \frac{3}{2}\,\frac{t}{G}\,l,$$

le triple de la déformation du solide prismatique.

4. *La force uniformément répartie de* p^k *par mètre courant a un bras de levier qui croît uniformément de* 0 *à* R, *depuis l'extrémité libre jusqu'à l'extrémité encastrée, le solide est prismatique.*

$$\Phi = \frac{1}{GI_0}\int_0^l \frac{pR}{2l}\,x^2\,dx = \frac{pRl^2}{6\,GI_0}.$$

Or $\qquad \dfrac{I_0}{r} = \dfrac{pRl^2}{2lt}; \qquad$ donc $\Phi = \dfrac{tl}{3Gr}$,

et $\qquad \Phi r = \dfrac{tl}{3G}.$

5. *Même cas, mais le solide a la forme d'égale résistance à section circulaire.*

$$\frac{M}{I_0} = \frac{l^{\frac{2}{3}}t}{r}\,x^{-\frac{2}{3}}; \quad \text{d'où} \quad \Phi = \frac{3tl}{Gr} \quad \text{et} \quad \Phi r = \frac{3tl}{G},$$

soit 9 fois la déformation trouvée au cas précédent.

6. *Le solide, encastré à ses deux extrémités, est soumis à une force* P *normale à la fibre moyenne et agissant au bout du bras de levier* R *dans un plan situé aux distances respectives* c *et* c' *des extrémités; solide prismatique.*

Soit $c' < c$. Le moment de torsion étant PR $\frac{c'}{l}$ dans la portion c et PR $\frac{c}{l}$ dans la portion c', il s'ensuit que la section dangereuse est dans la portion c', et que le solide prismatique a dû être calculé par l'équation

$$\frac{I_0}{r} = \frac{PRc}{lt}.$$

Donc $\frac{M}{I_0} = \frac{t}{r}$ et $\Phi r = \frac{tc'}{G}$ d'une part, et $\frac{tc}{G}$ de l'autre.

7. *Même cas, mais le solide est sollicité à la torsion par une force uniformément répartie à raison de* p^k *par mètre courant agissant au bout du bras constant* R^m.

Les moments d'encastrement sont égaux chacun à $\frac{plR}{2}$, par suite le moment de torsion à une section quelconque est

$$M = plR\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right);$$

I_0 est constant et les dimensions de la section dangereuse (sections d'encastrement), se calculent par

$$\frac{I_0}{r} = \frac{plR}{2t}.$$

On a donc $$\Phi r = \frac{tl}{4G}.$$

103. Problème V. — *Évaluer le travail des forces moléculaires évoquées par une déformation, et leur travail par kil. de matière en action.*

Par le même raisonnement que pour la flexion (nº 86) on trouve :

Travail élémentaire pour une fibre $\frac{1}{2}\theta\varphi\rho$;

Valeur de l'angle φ d'après nº 94 $\varphi = \frac{M}{GI_0}dx$;

Travail élémentaire pour une section

$$\frac{1}{2}\varphi\Sigma\theta\rho = \frac{1}{2}\varphi M = \frac{1}{2}\frac{M^2}{GI_0}dx;$$

Travail total $T = \frac{1}{2G}\int_0^l \frac{M^2}{I_0}\,dx = \frac{1}{2G}\int_0^l t^2\,\frac{I_0}{r^2}\,dx$;

Poids $Q = \Delta\int_0^l S\,dx$;

Travail par kil.

$$T_1 = \frac{1}{2\Delta G}\,\frac{\int_0^l \frac{M^2}{I_0}\,dx}{\int_0^l S\,dx} = \frac{1}{2\Delta G}\,\frac{\int_0^l t^2\,\frac{I_0}{r^2}\,dx}{\int_0^l S\,dx}.$$

Applications. — *Chercher le travail* T_1 *dans les mêmes cas que l'arc de torsion au nº précédent.*

1. $M = PR =$ const.; $T_1 = \frac{t^2}{2\Delta G}\left(\frac{I_0}{Sr^2}\right)$. Pour une section circulaire, $\frac{I_0}{Sr^2} = \frac{1}{2}$; pour une section rectangulaire, $\frac{1}{3}$; la première est donc préférable.

2. $M = pxR$; si le solide est prismatique, $\frac{I_0}{r} = \frac{plR}{t}$. I_0 et S sont constants et $T_1 = \frac{t^2}{6\Delta G}\left(\frac{I_0}{Sr^2}\right)$. Mêmes conclusions.

3. $M = pxR$; le solide à section circulaire a la forme d'égale résistance, $t =$ const. $T_1 = \frac{t^2}{4\Delta G}$.

Le solide rectangulaire donne $T_1 = \frac{t^2}{6\Delta G}$.

4. $M = \frac{pR}{l}x^2$; si le solide est prismatique, $\frac{I_0}{r} = \frac{plR}{t}$. I_0 et S sont constants et $T_1 = \frac{t^2}{10\Delta G}\left(\frac{I_0}{Sr^2}\right)$.

5. Même cas, mais le solide a la forme d'égale résistance.

Si la section est circulaire, $T_1 = \frac{1}{4}\frac{t^2}{\Delta G}$;

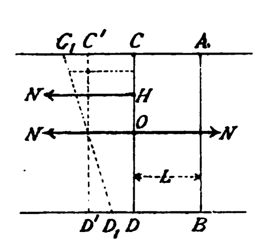
Si la section est rectangulaire, $T_1 = \frac{1}{6}\frac{t^2}{\Delta G}$.

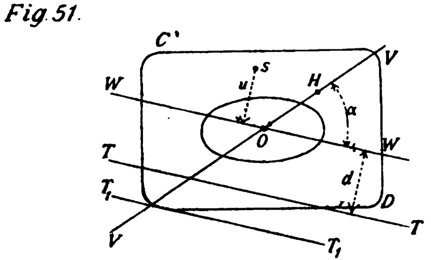
CHAPITRE VI.

FLEXION ET EXTENSION COMPOSÉES.

104. — Lorsque la section d'un solide est soumise à une seule force N^k normale, mais dont la droite représentative coupe la section en un point H qui n'est pas le centre d'élasticité, elle se trouve dans les mêmes conditions que si elle était soumise à la même force normale N^k appliquée au centre d'élasticité O, et en même temps à un couple de flexion dont le moment serait $M^{km} = N \times \overline{HO}$. (Voir fig. 51.)

Fig. 51.





En effet, on peut supposer qu'au point O sont appliquées deux forces en sens contraires, égales et parallèles à N. L'une d'elles, de même sens que N, sera la tension totale agissant au centre d'élasticité ; l'autre, avec la force donnée appliquée au point H formera un couple dont le moment $M = N \times \overline{HO}$, et dont le plan est projeté sur celui de la section suivant la droite HO.

Donc, soit que l'on donne N agissant au point H, et la distance $\overline{HO}$, ou bien N agissant au point O et un couple M agissant dans un plan projeté suivant la droite HO, le problème suivant aura la même solution.

105. Problème I. — *Étant donnés complètement la tension totale* N *et le couple* M *qui agissent ensemble sur une section donnée d'un solide de résistance homogène, trouver la tension résultante en un point quelconque de la section.*

Si la tension totale N agissait seule, la fibre s s'allongerait de ss' et subirait ainsi une tension θ_1 normale au plan de la section, et la même pour toutes les fibres puisque la section est homogène. Représentant par S^{mq} l'aire de la section, nous avons, pour calculer θ_1, d'après l'équation (7), $\theta_1 = \frac{N}{S} s$.

Si le couple M agissait seul sur la section CD dans le plan projeté suivant le diamètre VV de l'ellipse centrale, la flexion se produirait autour du diamètre conjugué WW et ainsi les fibres situées d'un côté de ce diamètre seraient allongées, les autres raccourcies; elles seraient donc soumises à une tension que nous nommerons θ_2 quel que soit son signe, et qui est normale à la section. Cette tension θ_2 est donnée, en vertu de l'équation (20), par

$$\theta_2 = \frac{M \sin \alpha}{I} us.$$

D'après la convention n° 45, 6°, le déplacement définitif de la base de la fibre soumise en même temps à ces deux effets, serait le même que si l'effort N, agissant seul, avait amené d'abord la section CD en C'D' et la fibre s en s', et si ensuite le couple M avait fait tourner la section en $C_1 D_1$ amenant s' en s''. Les deux déplacements s'ajoutent donc l'un à l'autre puisqu'ils ont tous deux la même direction normale à la section. Il en est aussi de même des tensions. La tension résultante

$$\theta = \theta_1 \pm \theta_2.$$

On en déduit

$$t = \frac{\theta}{s} = \frac{N}{S} \pm \frac{M \sin \alpha}{I} u.$$

Si le couple agit dans un plan qui renferme un des axes principaux d'inertie, ou, ce qui revient au même, si le point H appartient à l'un de ces axes, l'angle α est droit et l'on a

$$t = \frac{N}{S} \pm \frac{M}{I} u. \qquad (45)$$

106. Remarques. — I. On pourra toujours faire

$$M = N \times \overline{HO}.$$

Dès lors les deux formules précédentes peuvent s'écrire

$$t = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\mathrm{S}} \pm \frac{\overline{\mathrm{HO}}\sin\alpha}{\mathrm{I}} u\right), \tag{46}$$

$$t = \mathrm{N}\left(\frac{1}{\mathrm{S}} \pm \frac{\overline{\mathrm{HO}}}{\mathrm{I}} u\right). \tag{47}$$

II. Il est une valeur particulière de u qui annule la tension t; nous l'appellerons d, elle est donnée par l'équation

$$0 = \frac{1}{\mathrm{S}} - \frac{\overline{\mathrm{HO}}\sin\alpha}{\mathrm{I}} d,$$

d'où
$$d = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{S}.\overline{\mathrm{HO}}\sin\alpha}. \tag{48}$$

Donc les points de la droite TT située à la distance d de sa parallèle WW constituent un véritable *axe neutre* coupant la section en deux régions dont l'une contient toutes fibres allongées, l'autre toutes fibres raccourcies. Les choses se passent donc comme si la flexion avait lieu autour de l'axe TT.

III. On voit (n° 33) que le point H est le centre de percussion de la section CD par rapport à l'axe TT.

IV. D'après le n° 34, si l'axe neutre réel T_1T_1 était tangent au contour de la section, le point H se trouverait sur le lieu géométrique appelé noyau central. Si l'axe TT coupe la section, le point H est en dehors du noyau central.

Dans le premier cas, il y a un point de la section, le point de contact du contour avec la droite T_1T_1, pour lequel la tension est nulle, mais tous les autres points de la section éprouvent *des tensions de même sens*. Dans le second cas, l'axe TT divise la section en deux régions, l'une de fibres étendues, l'autre de fibres comprimées.

Donc, *lorsqu'une seule force normale est appliquée à une section d'un solide de résistance en dehors de son centre d'élasticité, si le point d'application tombe dans l'intérieur du noyau central, toutes les fibres de la section sont tendues dans le même sens.*

V. La pratique exige parfois que certains matériaux n'éprouvent de tension que dans un sens déterminé ; c'est ce qui arrive pour les constructions en maçonneries. Lorsqu'une pierre est posée sur une autre et soumise à une force normale au joint et ne passant pas par le centre d'élasticité, la tension se répartit comme si les deux pierres n'en formaient qu'une dont le joint serait une section. Mais si la tension avait le sens d'une compression dans une partie du joint seulement, et d'une extension dans l'autre, il en résulterait que le joint s'ouvrirait, ce que l'on cherche à éviter. C'est donc une règle des constructions en maçonneries que *la limite des positions du centre des pressions est le contour du noyau central du joint.*

VI. Lorsque le centre des pressions d'un joint de maçonnerie est sur l'un des axes principaux d'inertie, et que la forme géométrique de la section est symétrique par rapport à l'autre axe, ce que nous avons appelé d devenant la distance de la fibre la plus éloignée à cet axe, on a, en employant la même notation qu'aux formules (21) et (22) :

$$\text{limite de } \overline{\mathrm{HO}} = \frac{\mathrm{I}}{u'} \frac{1}{\mathrm{S}}.$$

Appelons q le rapport de cette limite de $\overline{\mathrm{HO}}$ à la dimension $2u'$ totale de la section suivant la direction HO, nous aurons

$$q = \frac{\mathrm{I}}{u'} \frac{1}{2u'\mathrm{S}}. \qquad (49)$$

Applications.

A. *Section rectangulaire pleine*, $q = \frac{1}{6}$

B. *Section circulaire ou elliptique pleine*, $q = \frac{1}{8}$

C. *Carré creux, épaisseur petite*, $q = \frac{1}{3}$ environ.

D. *Cercle creux, épaisseur petite*, $q = \frac{1}{4}$ "

107. Problème II. — *Étant donnés l'effort d'extension et le moment de flexion qui agissent sur une section homogène d'un solide de résistance, ainsi que la forme géométrique de cette section, en calculer les dimensions de manière que la plus grande tension ne dépasse pas une quantité déterminée*, t *kil. par mètre carré.*

En appelant u' la distance de la fibre la plus fatiguée à l'axe WW, on aura, d'après l'équation (44),

$$t = \frac{N}{S} + \frac{M \sin \alpha}{I} u'.$$

Dans cette équation, S et le module $\frac{I}{u'}$ sont des inconnues que l'on peut exprimer en fonction d'une seule des dimensions de la section dont la forme géométrique est donnée. Cette dimension dès lors devient la seule inconnue.

Dans les cas où la section est circulaire, elliptique ($b = nh$), ou rectangulaire, on arrive aux équations suivantes :

$$d^3 - \frac{4N}{\pi t} d - \frac{32M}{\pi t} = 0, \qquad \text{(circulaire)}$$

$$h^3 - \frac{4N}{n\pi t} h - \frac{32M}{n\pi t} = 0, \qquad \text{(elliptique)}$$

$$h^3 - \frac{N}{nt} h - \frac{6M}{nt} = 0. \qquad \text{(rectangulaire)}.$$

Exemple. — Le solide nos 22 et 75 est soumis à un couple de flexion de 4250 km. agissant dans le plan VV et à la tension totale $N = 800^k$. Faisant abstraction de l'effort tranchant, nous trouverons :

Pour la valeur de d (éq. 48),

$$d = \frac{0{,}01604\, b^4}{\frac{b^2}{2} \times \frac{4250}{800} \times 0{,}8006} = 0{,}007543\, b^2.$$

Pour la tension de la fibre la plus fatiguée (A, fig. 12),

$$t = \frac{800 \times 2}{b^2} + \frac{4250 \times 0{,}8006}{0{,}01604\, b^4} (d + u');$$

or $u' = 0{,}4385\, b$, ce qui mène à l'équation

$$b^3 - \frac{3200}{t} b - \frac{93013}{t} = 0;$$

et pour $t = 4.000.000$ kil. par m. q., on a

$$b^3 - 0{,}0008\, b - 0{,}0232532 = 0\,;$$

d'où, au millimètre près, $b = 0^m{,}287$ et $h = 0^m{,}144$.

Il est avantageux d'employer la méthode graphique pour résoudre ces équations du 3e degré. Voir note II à la fin du volume.

108. Applications. — *On suppose le solide prismatique et homogène et on demande de déterminer les dimensions de la section d'encastrement, étant donnée la tension maxima de* 5 000·000 *kil. par mètre carré pour la fibre la plus fatiguée.*

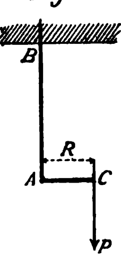


Fig. 52.

I. *Le solide rectiligne* BA (fig. 52) *est encastré à l'une de ses extrémités* B *et soumis à l'autre à un effort* P *de* 1000 *kil., dirigé parallèlement à* BA *et appliqué à la distance* $0^m{,}50 = R$ *de la fibre moyenne* BA. *La section doit être circulaire.*

$$d^3 - 0{,}00025465\, d - 0{,}0010186 = 0\,,$$

$$d = 0^m{,}102 \text{ au millimètre près.}$$

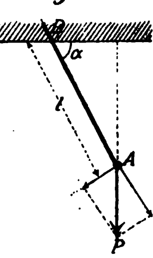


Fig. 53.

II. *Le solide est encastré obliquement en* B, *sous un angle* α *avec le mur* (fig. 53) *et il est soumis à un effort* P *normal au mur. Section carrée.* On donne

$$\alpha = 30^o\,;\quad P = 1000^k\,;\quad l = 1^m.$$

On a $N = P \sin \alpha = 500^k$,

$$M = Pl \cos \alpha = 866^{km}\,,$$

$$h^3 - 0{,}0001\, h - 0{,}0010392 = 0\,,$$

$$h = 0^m{,}102 \text{ au millimètre près.}$$

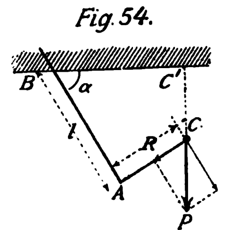


Fig. 54.

III. *Le solide* (fig. 54) *est dans le même cas que le précédent, mais la force* P *est appliquée au bout d'un bras* AC *perpendiculaire à* BA. On donne

$$P = 1000\,;\quad l = 1^m{,}00\,;\quad \alpha = 30^o\,;\quad R = 0^m{,}50.$$

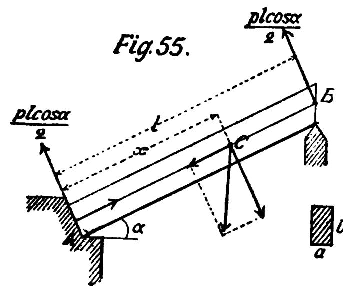
On a

$$N = P \sin \alpha = 500^k\,,$$

$$M = P \times \overline{BC'} = P(l \cos \alpha + R \sin \alpha) = 1116^{km}\,,$$

$$h^3 - 0{,}0001\, h - 0{,}0013392 = 0\,,$$

$$h = 0^m{,}111 \text{ au millimètre près.}$$



109. Problème III. — *Une poutre prismatique, homogène, dont la section est rectangulaire, supportant une charge uniformément répartie de p^k par mètre courant, est inclinée d'un angle α à l'horizon et supportée à son extrémité inférieure; elle repose sur des appuis placés à ses deux bouts. On demande la position de la section dangereuse ainsi que la tension de la fibre la plus fatiguée dans cette section.* (Fig. 55.)

Soient : l^m la longueur de la poutre; x^m la distance d'une section quelconque C à l'appui inférieur A pris pour origine. Les réactions verticales seront $\frac{pl}{2}$ et, estimées normalement à la fibre moyenne, $\frac{pl}{2}\cos\alpha$. Le point d'appui inférieur doit aussi offrir une réaction égale à $pl\sin\alpha$ dans la direction AB. Une section C quelconque supporte de la part de la portion supérieure CB de la poutre une compression

$$N = p\,(l - x)\sin\alpha$$

et en même temps un moment de flexion

$$M = \frac{pl}{2}x\cos\alpha - \frac{px^2}{2}\cos\alpha = \frac{p}{2}x\,(l-x)\cos\alpha.$$

Donc, en vertu de l'équation (45), la tension de la fibre la plus fatiguée dans cette section est

$$t' = \frac{N}{S} + \frac{M}{I}u',$$

$$t' = \frac{3p}{ab^2}\cos\alpha\,(l-x)\left(x + \frac{b\operatorname{tg}\alpha}{3}\right).$$

Il est une valeur de x qui rend t' un maximum. En effet, la somme $l - x + x + b\frac{\operatorname{tg}\alpha}{3}$ des deux facteurs variables

est constante et égale à $l + b \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}$; donc le produit ou t' est maximum et égal à T pour la valeur X de x, qui rend les deux facteurs égaux chacun à $\frac{l}{2} + \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{6}$. Donc

$$T = \frac{3p}{4ab^2} \cos \alpha \left(l + \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{3}\right)^2.$$

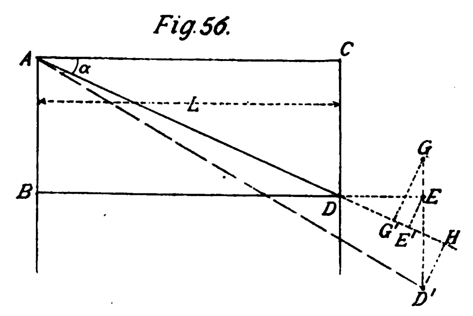
Exemple. — La charge p est le poids même du solide évalué à raison de 3000 kil. par mètre cube; $\alpha = 45°$; $b = 0^m,50$. On suppose qu'à la tension de 1 000 000 kil. par mètre carré la pièce se rompt et que les lois adoptées ici sont encore valables jusqu'à la rupture. On demande quelle est la longueur l pour laquelle la poutre se rompra et où sera située la section de rupture. Le calcul donne $l = 17^m,50$.

CHAPITRE VII.

FLEXION ET TORSION COMPOSÉES.

110. — Nous adoptons pour ce cas la méthode de Poncelet à peu près telle qu'elle a été exposée dans l'édition de Navier publiée par Barré de St Venant, page 372. Elle s'écarte de ce qui précède surtout par la considération de la contraction transversale et conduit directement à la formule théorique que la pratique a sanctionnée.

Fig. 56.



Soient : ABCD la section longitudinale d'un prisme élémentaire considéré (fig. 56); AD sa diagonale à l'état pri-

mitif; A D' cette même diagonale déformée en vertu 1° d'un allongement DE $= i$L de la fibre; 2° d'une contraction transversale $\overline{EG} = k.\ \overline{CD} = k L \operatorname{tg} \alpha$; 3° d'un glissement dû à la torsion, $\overline{GD'} = g$ L.

La déformation de la diagonale AD sera $\overline{DH}$ et nous ferons

$$\overline{DH} = i'.\overline{AD} = i' \frac{L}{\cos \alpha}$$

en appelant i' l'allongement proportionnel résultant pour la diagonale.

Le but du problème est de rechercher sous quel angle α l'allongement proportionnel résultant, i', est maximum.

Or, on a

$$\overline{DH} = \overline{DE} \cos \alpha - \overline{EG} \sin \alpha + \overline{GD'} \sin \alpha,$$

ou $$\frac{i'}{\cos \alpha} = i \cos \alpha - k \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + g \sin \alpha,$$

ou $$i' = i \cos^2 \alpha - k \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha,$$

ou $$i' = i - (i + k) \sin^2 \alpha + \frac{g}{2} \sin 2 \alpha.$$

Le maximum de i' a lieu pour $\frac{di'}{d\alpha} = 0$, soit pour

$$\operatorname{tg}^2 \alpha_0 = \frac{g}{i + k};$$

d'où $$\sin^2 \alpha_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{i + k}{\sqrt{(i + k)^2 + g^2}} \right\},$$

et $$\sin^2 \alpha_0 = \frac{g}{\sqrt{(i + k)^2 + g^2}};$$

enfin $$i'_m = \frac{i - k}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(i + k)^2 + g^2}.$$

En admettant que la contraction transversale k pour les matériaux employés dans les machines soit le quart de la dilatation longitudinale i, on a $k = \frac{i}{4}$ et

$$i'_m = \frac{3}{8} i + \sqrt{\left(\frac{5}{8} i\right)^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2}. \qquad (50)$$

Soient maintenant : X^{km} le moment réel de flexion agissant dans un plan dont la projection fait l'angle β avec le diamètre conjugué ; $\frac{I}{u'}$ le module de flexion de la section par rapport à l'axe neutre ; $M_0{}^{km}$, le moment de torsion et $\frac{I_0}{r}$ le module de torsion ; E, G, L, même signification que ci-devant. On aura

$$i = \frac{X \sin \beta}{E} \left(\frac{u'}{I}\right), \qquad g = \frac{M_0}{G} \left(\frac{r}{I_0}\right).$$

Enfin, soit M un moment de flexion fictif qui, à lui seul, produirait l'allongement i'_m et agirait dans le même plan que le couple X ; c'est-à-dire soit

$$i'_m = \frac{M \sin \beta}{E} \left(\frac{u'}{I}\right);$$

nous aurons

$$M \sin \beta = \frac{3}{8} X \sin \beta + \sqrt{\left(\frac{5}{8} X \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{E}{G} \frac{\frac{I}{u'}}{\frac{I_0}{r}} M_0\right)^2} ;$$

or $\frac{E}{G} = \frac{5}{2}$, donc

$$M \sin \beta = \frac{3}{8} X \sin \beta + \frac{5}{8} \sqrt{X^2 \sin^2 \beta + \left(2 \frac{\frac{I}{u'}}{\frac{I_0}{r}} M_0\right)^2} . \quad (51)$$

Donc si l'on donne X, β, M_0 et la forme géométrique de la section, ainsi que la tension t la plus grande permise pour la fibre la plus fatiguée, pour déterminer les dimensions de la section, il faut exprimer les modules en fonction de l'une seulement de ces dimensions, et, ayant calculé $M \sin \beta$ au moyen de l'équation (51), poser

$$\frac{I}{u'} = \frac{M \sin \beta}{t}; \quad (52)$$

d'où l'on déduira la dimension inconnue.

111. — Pour toute section dont l'ellipse centrale devient un cercle, $\sin\beta = 1$. Tel est le cas des *sections circulaires et des polygones réguliers*. Pour eux on a donc

$$M = \frac{3}{8}X + \frac{5}{8}\sqrt{X^2 + \left(2\,\frac{\frac{I}{u'}}{\frac{I_0}{r}}\,M_0\right)^2}. \qquad (53)$$

La même formule servira chaque fois que le couple de flexion X agira dans un plan qui contient l'un des axes principaux d'inertie de la section.

De plus, pour les sections circulaires $\frac{I}{u'} : \frac{I_0}{r} = \frac{1}{2}$,

» carrées » $= \frac{1}{\sqrt{2}}$,

avec $\sin\beta = 1$ et » rectangulaires (b,h) » $= \frac{h}{\sqrt{h^2+b^2}}$.

Donc

pour cercles $M = \frac{3}{8}X + \frac{5}{8}\sqrt{X^2 + M_0^2}$,

» carrés $M = \frac{3}{8}X + \frac{5}{8}\sqrt{X^2 + 2M_0^2}$,

» rectangles ($\sin\beta = 1$), $M = \frac{3}{8}X + \frac{5}{8}\sqrt{X^2 + 4\frac{h^2}{h^2+b^2}M_0^2}$.

112. Exemples. — I. Un arbre à section circulaire, encastré à l'une de ses extrémités, est sollicité à l'autre par une seule force 2000 kil. agissant au bout d'un bras de levier $0^m,50$; la longueur de l'arbre est $1^m,50$; la plus grande tension permise 5 000 000 kil. par mètre carré. On demande le diamètre de la section d'encastrement au millimètre près.

On a
$X = 2000 \times 1,50 = 3000$ km.
$M_0 = 2000 \times 0,50 = 1000$ »
$M = 1125 + 1976 = 3101$ »
$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{3101}{5\,000\,000}$,
$d = 0^m,185$ au millimètre près.

Si l'on n'avait pas eu égard au moment de torsion, on aurait trouvé

$$\frac{\pi d'^3}{32} = \frac{3000}{5\,000\,000},$$

d'où $$d' = 0^m,183.$$

II. Au problème n° 22 on donne $M_0 = 1500$ km.; $X \sin \beta = 3403$ km.; $\frac{I}{u'} : \frac{I_0}{r} = 0,3926$; $\frac{I}{u'} = 0,03658\, b^3$; $b = 2h$; $t = 4\,000\,000$ k. par m. q.

On trouve $t \frac{I}{u'} = 3501$ km.; d'où $b = 0^m,288$, $h = 0^m,144$.

CHAPITRE VIII.

SUR LE CALCUL DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES ET SPHÉRIQUES ET DES FONDS PLATS (1).

113. — *Enveloppe cylindrique*, *grande pression à l'intérieur*. — Soit (fig. 57) un cylindre creux, fermé à ses deux bouts par des fonds d'une solidité indéfinie; renfermant un fluide capable d'exercer en chacun des points de la surface intérieure une pression de P kil. par mètre carré; plongé dans un fluide exerçant en sens contraire, mais toujours dans la direction des rayons, une pression de P′ kil. par mètre carré. Nous supposons d'abord P > P′.

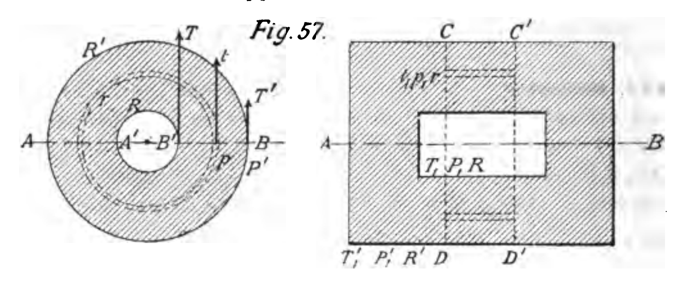


Fig. 57.

(1) La méthode suivie est celle de M. le colonel Devos, Cours de construction, 1879.

A l'état primitif le métal de l'enveloppe cylindrique n'éprouve aucune extension ni compression. L'effet des pressions P est d'augmenter le rayon intérieur et de produire ainsi une tension tangentielle sur les fibres circulaires, tension qui varie d'une fibre circulaire à la suivante d'après son rayon r. Les pressions P′ diminuent cet effet. Mais ces mêmes pressions normales et de sens contraires ont un second effet qui consiste à diminuer l'épaisseur dr des fibres circulaires, et par suite aussi l'épaisseur R′ — R. Il en résulte que les fibres circulaires éprouvent chacune une certaine tension tangentielle ou longitudinale que nous appellerons t pour la fibre de rayon r quelconque variant de R à R′; T pour la fibre intérieure de rayon R; T′ pour la fibre extérieure de rayon R′; et en même temps une compression transversale, normale à la précédente, qui est P pour la fibre de rayon R, p pour la fibre de rayon r et P′ pour la fibre de rayon R′.

Les tensions sont toutes exprimées en kil. par mètre carré; les dimensions, en mètres; nous considérerons une portion de cylindre d'un mètre de longueur, comprise entre les plans CD et C′D′. Sous les influences diverses que nous venons de faire connaître, le cylindre tend à se rompre suivant le plan projeté en AB et compris entre les deux sections d'un mètre de longueur projetées en AA′ et BB′.

114. Problème I. — *Dans les conditions ci-dessus énoncées, chercher la tension longitudinale* t *en un point quelconque des sections* AA′ *et* BB′; *et la compression transversale* p *au même point. La matière est supposée homogène.*

Nous ferons usage de la propriété suivante : *Lorsqu'une circonférence de cercle de rayon* r *supporte une pression normale en chaque point et uniformément répartie à raison de* p *kil. par mètre courant, l'effet de ces pressions sur une demi-circonférence estimé parallèlement à une direction perpendiculaire au diamètre est* p.2r; *en d'autres termes, il est le même que si la pression* p

s'exerçait normalement sur le diamètre seul (1). Nous regarderons cet effet comme réparti en deux parties égales aux extrémités d'un même diamètre.

Cela posé, si nous considérons les fibres comprises entre les rayons R et r, la résultante des tensions longitudinales qu'elles éprouvent est égale à

$$PR - pr.$$

Mais t étant leur tension longitudinale par mètre carré ou par mètre courant du rayon (puisque nous supposons que chaque fibre a un mètre de longueur), la tension d'une fibre d'épaisseur dr sera tdr, et la résultante des tensions tdr, qui doit être égale à $PR - pr$, sera la somme de quantités analogues à tdr, prise entre R et r. On a donc

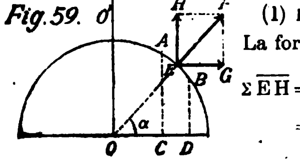
$$PR - pr = \int_R^r tdr;$$

ou

$$-d(pr) = tdr. \qquad (a)$$

A cette première relation entre p, t et r s'en ajoute une seconde par la considération de la diminution de l'épaisseur des fibres due à leur compression. La compression totale d'une pièce d'un mètre de longueur serait $\frac{p}{E}$, E étant le coefficient d'élasticité: la compression d'une pièce de dr mètres d'épaisseur sera donc $\frac{p}{E}\, dr$, c'est-à-dire que la diminution totale de l'épaisseur entre les rayons primitifs R et r doit être

$$\frac{1}{E}\int_R^r pdr.$$



(1) **Démonstration sommaire.** — Fig. 59. La force cherchée est

$$\Sigma\,\overline{EH} = \Sigma\, F\sin\alpha = \Sigma p\,.\,\overline{AB}\sin\alpha = p\,\Sigma\,\overline{AB}\sin\alpha$$
$$= p\,\Sigma\,\overline{CD} \;= p\,.\,2r. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous pouvons en obtenir une autre expression. L'épaisseur primitive était $r - R$. Or, la fibre circulaire, qui avait primitivement r pour rayon et $2\pi r$ pour longueur, s'est allongée de $\frac{t}{E}$ par mètre courant et, par suite, de $2\pi r \frac{t}{E}$ au total. Elle a donc actuellement pour longueur $2\pi r\left(1+\frac{t}{E}\right)$; et, comme elle est restée circulaire, son rayon est actuellement $r\left(1+\frac{t}{E}\right)\cdot$ De même la fibre, qui avait primitivement R pour rayon, a, après déformation, un rayon $R\left(1+\frac{T}{E}\right)\cdot$ Donc l'épaisseur totale, qui était $r - R$ à l'état primitif, est devenue à l'état déformé

$$r\left(1+\frac{t}{E}\right)-R\left(1+\frac{T}{E}\right);$$

et, par suite, la diminution d'épaisseur est

$$R\frac{T}{E}-r\frac{t}{E}\cdot$$

On a donc

$$R\frac{T}{E}-r\frac{t}{E}=\frac{1}{E}\int_R^r pdr,$$

d'où

$$-d(tr)=pdr. \qquad (b)$$

Développons les équations fondamentales (a) et (b), additionnons-les membre à membre, puis soustrayons-les, nous arriverons aux résultats consignés dans les équations suivantes :

$$pdr+rdp+tdr=0,$$
$$tdr+rdt+pdr=0,$$

d'où

$$dt-dp=0,$$
$$t-p=\text{const.}=T-P=T'-P'. \qquad (c)$$

Ensuite

$$2(t+p)\,dr+r\,(dt+dp)=0,$$
$$2\frac{dr}{r}+\frac{d\,(t+p)}{t+p}=0,$$
$$r^2\,(t+p)=\text{const.}=R^2(T+P)=R'^2(T'+P') \qquad (d)$$

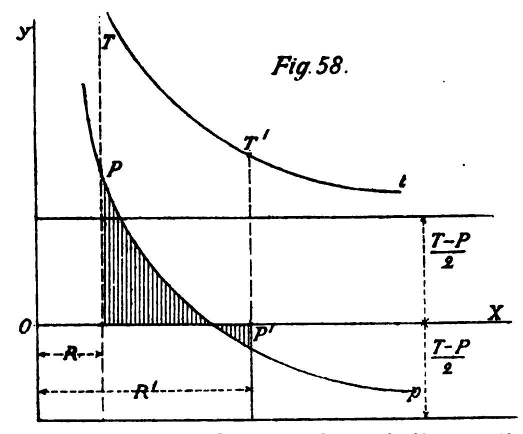
Enfin, des équations (c) et (d) on déduit :

$$t = \frac{T - P}{2} + \frac{R^2}{r^2}\frac{T + P}{2}, \qquad (54)$$

$$p = -\frac{T - P}{2} + \frac{R^2}{r^2}\frac{T + P}{2}, \qquad (55)$$

équations qui forment la solution de la question.

115.— Le diagramme des valeurs de t et p, tracé fig. 58, montre nettement comment ces quantités varient avec le



rayon. La courbe (t) est du genre hyperbolique; elle a pour asymptotes l'axe des y d'une part et d'autre part une parallèle à l'axe des x située à la hauteur

$$y_1 = \frac{T - P}{2}.$$

La courbe (p) est identique à la précédente que l'on aurait descendue parallèlement à l'axe des y à une distance T — P en dessous de la première. Elle a donc pour asymptotes l'axe des y et la droite

$$y_2 = -\frac{T - P}{2}.$$

Il s'ensuit que la fibre la plus fatiguée est celle dont le rayon est le plus petit, c'est-à-dire la fibre intérieure de rayon R, et sa tension est T.

116. Enveloppe cylindrique, grande pression à l'extérieur. Même problème I.

La tension t qui, dans le premier cas, était prise avec le signe positif, était une extension; dans le cas présent, c'est une compression; donc il faut changer le signe de t.

Ainsi les équations (a) et (b) deviennent respectivement

$$d\,(pr) = tdr, \qquad (a')$$
$$d\,(tr) = pdr. \qquad (b')$$

On en déduit $p + t = \text{const.} = \mathrm{P} + \mathrm{T} = \mathrm{P}' + \mathrm{T}'$, ($c'$)

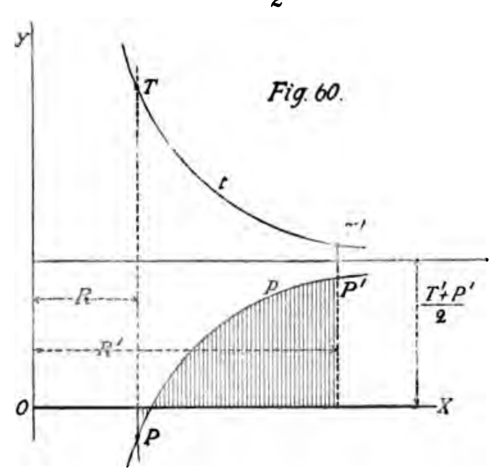
$$r^2\,(t - p) = \text{const.} = \mathrm{R}^2\,(\mathrm{T} - \mathrm{P}) = \mathrm{R}'^2\,(\mathrm{T}' - \mathrm{P}'),$$

et
$$t = \frac{\mathrm{T}' + \mathrm{P}'}{2} + \frac{\mathrm{R}'^2}{r^2}\,\frac{\mathrm{T}' - \mathrm{P}'}{2}, \qquad (56)$$

$$p = \frac{\mathrm{T}' + \mathrm{P}'}{2} - \frac{\mathrm{R}'^2}{r^2}\,\frac{\mathrm{T}' - \mathrm{P}'}{2}. \qquad (57)$$

Les deux courbes, diagrammes des valeurs de t et de p, ont encore pour asymptote commune l'axe des y (fig. 60); de plus la droite

$$y = \frac{\mathrm{T}' + \mathrm{P}'}{2}$$



est aussi une asymptote commune; les deux courbes sont symétriquement placées par rapport à cette droite. On voit

donc : 1° que, contrairement au cas précédent, la compression transversale des fibres circulaires va en diminuant de l'extérieur vers l'intérieur; 2° que, de même que dans le cas précédent, la compression longitudinale va en augmentant de l'extérieur vers l'intérieur.

117. Enveloppe sphérique, grande pression à l'intérieur. Même problème I.

La propriété rappelée n° 114 pour une demi-circonférence de cercle convient à une demi-sphère. Il en résulte que la composante des pressions qui s'exercent à l'intérieur de la demi-sphère est égale à $P\pi R^2$. De même pour la sphère de rayon r, la composante est $p\pi r^2$. La différence $\pi(PR^2 - pr^2)$ est égale à la résultante des tensions normales à l'anneau obtenu en coupant la sphère par un plan diamétral. Or, cette tension est $t\,dr$ par mètre courant de la fibre qui a une longueur totale $2\pi r$; donc la tension totale pour cette fibre est $2\pi r t\,dr$; et l'on a

$$\pi(PR^2 - pr^2) = \int_R^r 2\pi r t\,dr,$$

d'où

$$-d(pr^2) = 2rt\,dr.$$

Quant à la seconde relation, elle est la même que dans le premier cas, celui du cylindre avec grande pression à l'intérieur. On a donc à traiter les deux équations

$$d(pr^2) + 2rt\,dr = 0, \qquad \text{(A)}$$

$$d(tr) + p\,dr = 0. \qquad \text{(B)}$$

D'où

$$r^2dp + 2pr\,dr + 2tr\,dr = 0,$$

$$r^2dt + tr\,dr + pr\,dr = 0,$$

$$r(dp + dt) + 3(p + t)\,dr = 0,$$

$$3\frac{dr}{r} + \frac{d(p+t)}{p+t} = 0,$$

$$r^3(p + t) = \text{const.} = R^3(P+T) = R'^3(P'+T'), \qquad \text{(C)}$$

$$2\,dt - dp = 0,$$

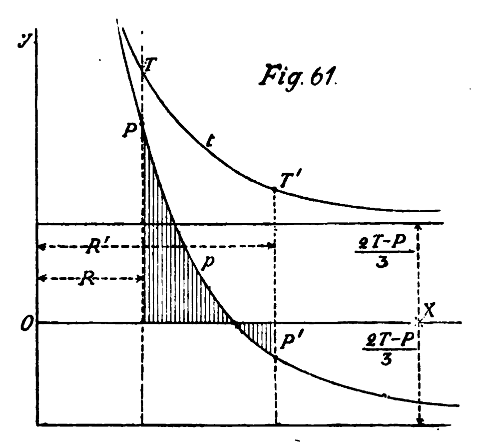
$$2t - p = \text{const.} = 2T - P = 2T' - P'. \qquad \text{(D)}$$

D'où

$$t = \frac{2T - P}{3} + \frac{R^3}{r^3}\,\frac{T + P}{3}, \qquad (58)$$

$$p = -\frac{2T - P}{3} + 2\,\frac{R^3}{r^3}\,\frac{T + P}{3}. \qquad (59)$$

La figure 61 donne les deux diagrammes des valeurs de t et de p. Ce sont encore des courbes hyperboliques ayant pour asymptote commune l'axe des y ; chacune a, en outre, une asymptote parallèle à l'axe des x, à la hauteur $\frac{2T - P}{3}$ pour la première et à la même hauteur, mais en dessous de l'axe des x pour la seconde. On voit que c'est encore la fibre intérieure de rayon R, qui est la plus fatiguée par extension.



118. Enveloppe sphérique, grande pression à l'extérieur. Même problème I.

La remarque qui nous a servi à établir les équations fondamentales (a') et (b') s'applique au cas présent et nous permet d'écrire sans les expliquer les équations suivantes :

$$d(pr^2) - 2trdr = 0, \qquad (A')$$

$$d(tr) - pdr = 0, \qquad (B')$$

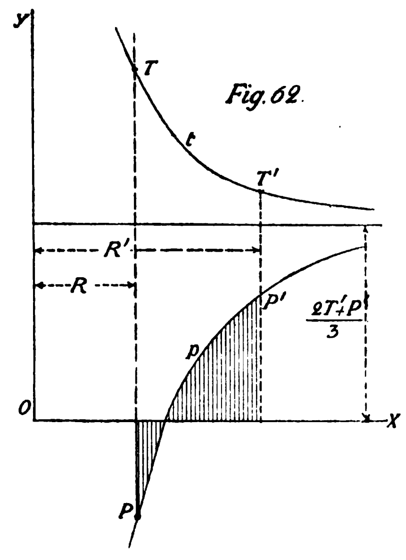
$$r^3(t - p) = \text{const.} = R^3(T - P) = R'^3(T' - P'), \qquad (C')$$

$$2t + p = \text{const.} = 2T + P = 2T' + P', \qquad (D')$$

$$t = \frac{2T' + P'}{3} + \frac{R'^3}{r^3}\frac{T' - P'}{3}, \qquad (60)$$

$$p = \frac{2T' + P'}{3} - 2\frac{R'^3}{r^3}\frac{T' - P'}{3}. \qquad (61)$$

Les deux diagrammes des valeurs de t et de p (fig. 62). ont encore pour asymptotes communes l'axe des y et la droite parallèle à l'axe des x et à la hauteur $\frac{2T' + P'}{3}$. La plus grande tension, ici une compression, a encore lieu à la fibre intérieure de rayon R.



119. Problème II. — *Étant donnés les rayons* R *et* R', *et les pressions* P *et* P', *trouver la tension* (K = T), *de la fibre la plus fatiguée.*

On trouve, en appelant z le rapport $\frac{R'}{R}$ des rayons :

$$
\left.
\begin{array}{lll}
1^{er} \text{ cas}, & K = & \dfrac{P(z^2+1) - 2P'z^2}{z^2 - 1}. \\
2^e \quad » & K' = - & \dfrac{P(z^2+1) - 2P'z^2}{z^2 - 1}. \\
3^e \quad » & K_1 = & \dfrac{P(z^3+2) - 3P'z^3}{2(z^3 - 1)}. \\
4^e \quad » & K'_1 = - & \dfrac{P(z^3+2) - 3P'z^3}{2(z^3 - 1)}.
\end{array}
\right\} \quad (62)
$$

120. Applications. — I. *On a donné à un corps de presse de* $0^m,30$ *de diamètre intérieur une épaisseur de* $0^m,15$ *pour supporter une pression de* 600^k *par cent. carré. Quelle est la tension de la fibre la plus fatiguée ?* $P' = 1^k$ *par c. q.*

On trouve $K = 997$ k. par cent. carré.

II. *Le rayon intérieur d'un cuvelage en briques est de 4 mètres ; pour lui faire supporter une pression de* $120\,000^k$ *par mètre carré, on lui a donné un rayon extérieur de* $7^m,33$. $P = 10\,000$ *k. par m. carré. On demande la tension maxima.*

On a $z = \frac{11}{6}$ et $K' = 323\,200$ k. par m. carré.

III. *Une sphère de* $0^m,10$ *de diamètre intérieur et* $0^m,159$ *de diamètre extérieur supporte une pression de* 300 *k. par cent. carré à l'intérieur et nulle à l'extérieur. On demande encore la tension maxima.*

On a $z^3 = 4$ et $K_1 = 300$ kil. par cent. carré.

IV. *Un serrement sphérique en chêne supporte extérieurement une pression de* 240 000 *kil. par m. carré et intérieurement,* 10 000 ; *le rayon intérieur est de* 7^m; *le rayon extérieur* 10^m; *on demande* K'_1.

On a $z = 1,43$, $z^3 = 2,924$ et $K'_1 = 531\,688$ kil. par m. carré.

121. Problème III. — *Étant donné l'un des rayons, calculer l'autre de manière que la tension de la fibre la plus fatiguée ne dépasse pas une grandeur* K *donnée.*

Entre les équations (*c*) et (*d*) on élimine T′; on y remplace T par K et on trouve pour le rayon inconnu.

$$\left.\begin{array}{lll} 1^{er} \text{ cas}, & R' = R\sqrt{\dfrac{K+P}{K-P+2P'}}, & (1) \\ 2^e \quad \text{"} & R = R'\sqrt{\dfrac{K'-2P'+P}{K'-P}}, & (2) \\ 3^e \quad \text{"} & R' = R\sqrt[3]{\dfrac{2(K_1+P)}{2K_1-P+3P'}}, & (3) \\ 4^e \quad \text{"} & R = R'\sqrt[3]{\dfrac{2K'_1+P-3P'}{2(K'_1-P)}}. & (4) \end{array}\right\} (63)$$

On voit qu'aucune épaisseur ne suffirait si,

dans le 1er cas, on avait $P \geqq K + 2P'$, (5)

dans le 3e " " " $P \geqq 2K_1 + 3P'$; (6)

et que le rayon interieur serait nul et la pièce pleine si,

dans le 2e cas, on avait $$P' = \frac{K' + P}{2}, \qquad (7)$$

dans le 4e » » » $$P' = \frac{2K'_1 + P}{3}. \qquad (8)$$

122. Applications. — I. *Le rayon d'une presse hydraulique est* $0^m,15$; *la pression extérieure est nulle; intérieure* 400 *kil. par cent. carré, on demande de calculer le diamètre extérieur, de manière que la tension maxima ne dépasse pas* 600 *kil. par cent. carré.*

La formule (1) donne $R' = R \times 2,23$; donc $d' = 0^m,67$.

II. *Le rayon intérieur d'un cuvelage est de* 4^m; *la pression extérieure de* 60 000^k *par m. q.; intérieure, de* 10 000; *tension maxima,* 350 000; *on demande le rayon extérieur* R'.

La formule (2) donne $R' = R \times 1,19 = 4,76$.

III. *Le diamètre intérieur d'une sphère est de* $0^m,10$; *la pression intérieure* 400 *kil. par cent. carré; extérieure, nulle; tension maxima* 600 *kil. par cent. carré. On demande* 2R'

La formule (3) donne $2R' = 2R \times 1,355 = 0^m,1355$.

IV. *Le rayon intérieur d'un serrement sphérique est* 7 *mètres; pression extérieure,* 240 000 *kil. par m. q.; pression intérieure,* 10 000 *k. par m. q.; tension maxima,* 450 000 k. *par m. q. On demande* R'.

La formule (4) donne $R' = R \times 1,674 = 11^m,72$.

123. Problème IV. — *Connaissant les rayons primitifs* R *et* R' *ainsi que la tension maxima et le coefficient d'élasticité* E, *chercher l'augmentation ou la diminution du rayon intérieur de la pièce.*

On a $$R_1 = R\left(1 \pm \frac{T}{E}\right). \qquad (64)$$

124. Applications. — *Les applications ci-dessus.*

I. *On donne* E = 1 000 000 *kil. par cent. carré.* On trouve
$R_1 = 1,0006\, R = 0^m,15009$.

II. *On donne* E = 1 100 000 000 *kil. par m. carré.* On trouve
$R_1 = 0,9997\, R = 3^m,9988$.

III. *On donne* E = 1 000 000 *kil. par cent. carré.* On trouve
$R_1 = 1,0006\, R = 0^m,05003$.

V. *On donne* E = 1 100 000 000 *kil, par m. q.* On trouve
$R_1 = 0,9996\, R = 6^m,9972$.

125. Remarque. — Lorsque la pression donnée est fort petite en comparaison de la tension maxima admise, l'épaisseur à laquelle on arrive est aussi fort petite comparativement au diamètre de la pièce. Alors on ne commet pas d'erreur préjudiciable en supposant que la tension t n'est pas variable, qu'elle est la même sur toute l'épaisseur, et la formule à employer devient beaucoup plus simple.

En effet l'équation qui donne R′ en fonction de R dans le cas du cylindre, devient

$$\mathrm{PR} - \mathrm{P'R'} = \mathrm{T}(\mathrm{R'} - \mathrm{R}), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R'} - \mathrm{R} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{P} - \mathrm{P'}}{\mathrm{T} + \mathrm{P'}};$$

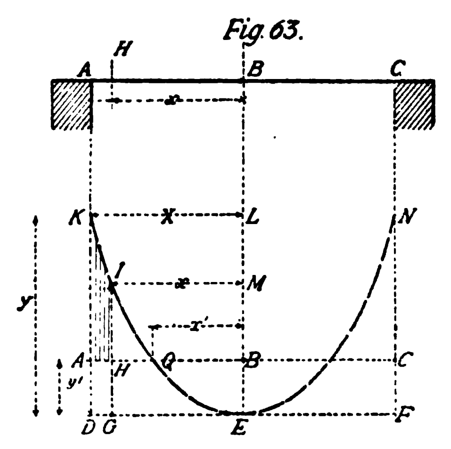
$$\text{ou} \quad \mathrm{P'R'} - \mathrm{PR} = \mathrm{T}(\mathrm{R'} - \mathrm{R}), \quad \text{d'où} \quad \mathrm{R'} - \mathrm{R} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{P'} - \mathrm{P}}{\mathrm{T} - \mathrm{P'}}.$$

Telle est la formule dont il est généralement fait usage dans le calcul des épaisseurs à donner à des tuyaux de fonte ou de fer soumis à de faibles pressions comme les tubes et les corps des chaudières, les cylindres et les tuyaux à vapeur, etc. Dans ces cas, du reste, on ajoute généralement une constante au résultat du calcul, pour des raisons que nous n'avons pas à énumérer ici.

126. Problème. — *Calculer l'épaisseur à donner à une plaque homogène primitivement plane, circulaire et reposant sur un appui circulaire tel qu'un cylindre creux* (fig. 63), *supportant une pression répartie uniformément à raison de* p^{k} *par mètre carré, de manière que la tension ne dépasse en aucun point* t *kil. par mètre carré.*

Considérons des sections circulaires concentriques de rayon variable x. La pression sur l'un de ces cercles sera $p\pi x^2$. Tel est aussi l'effort tranchant à la circonference de rayon x. Le diagramme de l'effort tranchant sera donc un arc de parabole KEN. Si, dans le but d'évaluer le moment de flexion, on veut appliquer à ce cas la propriété du diagramme de l'effort tranchant, il faut commencer par chercher la position d'une droite telle que ABC qui coupe l'aire du diagramme de l'effort tranchant en deux parties équivalentes, de telle sorte que le moment des forces extérieures

Fig. 63.



pour la pièce entière soit nul (n° 38). En d'autres termes, la droite AC doit être située de telle façon que l'on ait

$$\text{aire AKQ} = \text{aire QBE}, \qquad (65)$$

ou $$\frac{1}{3}XY - \frac{1}{3}x'y' - y'(X - x') = \frac{2}{3}x'y',$$

d'où $$y' = \frac{Y}{3}.$$

Or $$Y = p\pi r^2,$$

donc $$y' = \frac{1}{3}p\pi r^2 = \overline{BE} = \overline{AD}.$$

D'après cela, le moment de flexion à la section circulaire de rayon x et d'épaisseur e sera

$$M = \text{aire AKIH} = \frac{1}{3}p\pi r^2.r - \frac{1}{3}p\pi x^2.x - \frac{1}{3}p\pi r^2(r - x),$$

$$M = \frac{1}{3}p\pi x(r^2 - x^2).$$

D'autre part, le moment d'inertie

$$I = \frac{2\pi x e^3}{12},$$

et, par suite,

$$\frac{M}{I} = \frac{2p}{e^3}\left(r^2 - x^2\right).$$

Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2p}{Ee^3}\left(r^2 - x^2\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{Ee^3}\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right),$$

$$y = \frac{2p}{Ee^3}\left(\frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \mathrm{C}\right).$$

La constante C est déterminée par la condition qu'à $x = r$ correspond $y = 0$; d'où $\mathrm{C} = -\frac{5}{12}r^4$ et

$$y = \frac{p}{Ee^3}\left(r^2x^2 - \frac{x^4}{6} - \frac{5}{6}r^4\right).$$

La flèche $\quad \mathrm{Y} = \frac{5}{6}\,\frac{p}{\mathrm{E}}\,e\left(\frac{r}{e}\right)^4.$ (66)

La quantité $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}}$ est maxima au centre ou pour $x = 0$ et vaut en ce point $\frac{2pr^2}{e^3}$. On a donc, pour calculer e, d'après la formule (25),

$$\frac{2pr^2}{e^3} = \frac{2t}{e}, \qquad \text{d'où} \quad e = r\sqrt{\frac{p}{t}}. \qquad (67)$$

Avec cette épaisseur, la grandeur de la flèche devient

$$\mathrm{Y} = \frac{5}{6}\,\frac{rt}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{t}{p}}.$$

127. Application. — *On donne* $2\mathrm{r} = 0^{\mathrm{m}},60$; $\mathrm{p} = 8$ *kil. par cent. carré ;* $\mathrm{t} = 400$ *kil. par cent. carré ;* $\mathrm{E} = 1\,000\,000$ *kil. par c. q.*

On trouve $\quad e = 0^{\mathrm{m}},043, \qquad \mathrm{Y} = 0^{\mathrm{m}},0007.$

128. Problème. — *Le même que le précédent si ce n'est que la plaque est encastrée à sa circonférence extérieure.*

En appelant m une quantité proportionnelle au moment d'encastrement, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2p}{Ee^3}(x^2 - r^2 - m),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{Ee^3}\left(\frac{x^3}{3} - r^2x - mx\right);$$

la condition $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = r$ donne $m = -\frac{2}{3}r^2$ et

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{p}{Ee^3}(x^3 - r^2x),$$

$$y = \frac{1}{3}\frac{p}{Ee^3}\left(\frac{x^4}{2} - r^2x^2 + \frac{r^4}{2}\right);$$

la constante $\frac{r^4}{2}$ étant donnée par la condition $y = 0$ pour $x = r$.

La flèche $$Y = \frac{1}{6}\frac{p}{E}e\left(\frac{r}{e}\right)^4.$$

La section dangereuse est à l'encastrement où l'on a

$$\frac{M}{I} = \frac{4}{3}\frac{p}{e^3}r^2 = \frac{2t}{e},$$

d'où $$e = r\sqrt{\frac{2}{3}\frac{p}{t}}, \qquad (68)$$

et $$Y = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{rt}{E}}\sqrt{\frac{t}{p}}. \qquad (69)$$

129. Application. — *Les mêmes données qu'au n° 127.*

On trouve $e = 0^m,018$ et $Y = 0^m,0003$.

CHAPITRE IX.

SUR LE CALCUL DES PIÈCES PRESSÉES PAR LEURS ABOUTS.

130. Problème I. — *Étant donné l'effort* N *qui s'exerce sur l'about d'une pièce dans la direction de sa fibre moyenne et dans le sens d'une compression, trouver la tension par mètre carré en un point donné d'une section quelconque.*

Fig. 64.

Voir fig. 64. La pièce est à la fois soumise à la compression N et au moment de flexion Ny, et la flexion se produit suivant un des axes principaux d'inertie. Donc, d'après l'équation (45), (n° 105), la tension d'une fibre quelconque de la section CD est exprimée par

$$t = \frac{N}{S} \pm \frac{Ny}{I} u.$$

On voit donc que la distance de la fibre neutre à la fibre moyenne est donnée par l'équation

$$0 = \frac{1}{S} - \frac{y}{I} v, \quad \text{d'où} \quad vy = \frac{I}{S}, \qquad (70)$$

dans laquelle y doit être remplacé par sa valeur en fonction de x. De même l'expression de la tension t n'est complète qu'après que y est remplacé par sa valeur en fonction de x. Ainsi, parceque le bras de levier de la force N qui produit le moment fléchissant est, non plus une fonction de l'abscisse x, mais bien de l'ordonnée de l'élastique, il est nécessaire, pour obtenir les tensions, de rechercher tout d'abord l'équation de la fibre après déformation.

131. Problème II. — *Chercher l'équation de la courbe affectée par la fibre moyenne d'un solide pressé par ses abouts.* Nous nous bornerons à l'examen des cas particuliers suivants :

I. *Les points* A *et* B *sont assujettis à rester sur l'axe des* x.

On a
$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{N}{EI}y=0,$$
équation linéaire du second ordre dont l'intégrale générale est
$$y=A\cos kx+B\sin kx.$$
On en déduit
$$\frac{dy}{dx}=-k(A\sin kx-B\cos kx),$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-k^2(A\cos kx+B\sin kx)=-k^2y.$$
Donc
$$k^2=\frac{N}{EI}\quad\text{et}\quad k=\sqrt{\frac{N}{EI}}.$$
$y=0$ pour $x=0$ donne $A=0$.
$y=0$ pour $x=l$ donne $B\sin kl=0$;

or, comme B ne peut être nul sans que l'on ait $y=0$, on voit que l'équation de la courbe est
$$y=B\sin kx, \tag{71}$$
dans laquelle k satisfait à l'équation
$$0=\sin kl. \tag{72}$$
Si n représente un nombre entier, cette équation donne
$$kl=n\pi,$$
$$l\sqrt{\frac{N}{EI}}=n\pi,\quad\text{d'où}\quad N=n^2\pi^2\frac{EI}{l^2}.$$
Faisant $P=\frac{N}{S}$, on en déduit $P=n^2\pi^2\frac{EI}{l^2S}$.

On en conclut que P a une infinité de valeurs dont la plus petite est
$$P_1=\pi^2\frac{EI}{l^2S}. \tag{73}$$
Si P reste en dessous de cette limite, la flexion n'a pas lieu et $y=0$ parce que $B=0$. Si P est exactement égal à sa limite P_1, l'équation de l'élastique est
$$y=B\sin\frac{\pi x}{l},$$

où B reste indéterminée; c'est-à-dire que le solide est dans un état d'équilibre indifférent sous la forme sinusoïdale quelconque prise par sa fibre moyenne.

Remarquons que I est le plus petit des deux moments d'inertie principaux.

On voit 1° qu'à l'état d'équilibre, la tige est simplement comprimée sans flexion tant que la charge P reste inférieure à la limite P_1 (73), celle-ci fût-elle la charge de rupture.

2° Si la charge est supérieure à P_1, la pièce en équilibre sera à la fois comprimée et fléchie; l'équation de sa fibre moyenne sera $y = B \sin kx$; la tension $t = P \pm \frac{PSy}{I} u$; la distance v de la fibre neutre à la fibre moyenne

$$v = \frac{I}{Sy};$$

le coefficient angulaire de la touchante

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = Bk \cos kx.$$

Ce coefficient devient nul pour $x_1 = \frac{\pi}{2k}$,

et, pour la plus petite valeur de k, c'est-à-dire $k_1 = \frac{\pi}{l}$,

on a $x_1 = \frac{l}{2}$.

Fig. 65.

3° Des formules précédentes on peut déduire la plus grande longueur que la pièce puisse avoir pour ne pas fléchir sous une charge donnée. Cette recherche fera l'objet du troisième problème de ce chapitre.

II. *Le point* A *est libre et la pièce encastrée en* B *peut fléchir de manière que le point* A *quitte la verticale.* (Fig. 65.)

Appelons N Y le moment d'encastrement inconnu. Nous aurons $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N}{EI}(Y - y)$,

et l'on voit immédiatement que $Y = \overline{A_0A}$.

Suivant la même marche que ci-dessus, nous aurons

$$y = A \cos kx + B \sin kx + C,$$

$$\frac{dy}{dx} = -k(A \sin kx - B \cos kx),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 (A \cos kx + B \sin kx) = k^2 (C - y);$$

d'où
$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad \text{et} \quad C = Y.$$

Conditions : pour $x = 0$, $y = Y$; pour $x = l$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$. On en déduit $Y = A + Y$ ou $A = 0$; d'où

$$y = Y + B \sin kx,$$

$$\frac{dy}{dx} = Bk \cos kx,$$

$$0 = y + B \sin kl,$$

$$0 = B \cos kl;$$

et, puisque B ne peut être nul, on a

$$\cos kl = 0 \quad \text{et} \quad kl = n\frac{\pi}{2}, \qquad k_1 l = \frac{\pi}{2};$$

enfin
$$P_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2 S}.$$

III. *Même cas, mais le point* A *est assujetti à rester sur l'axe des* x (fig. 66).

Fig. 66.

On a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(Ny + N'x),$$

$$y = A \cos kx + B \sin kx - \frac{N'}{N}x,$$

$$\frac{dy}{dx} = -k(A \sin kx - B \cos kx) - \frac{N'}{N},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2(A \cos kx + B \sin kx) = -k^2\left(y + \frac{N'}{N}x\right);$$

d'où

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}}.$$

Les conditions $y = 0$ pour $x = 0$ et pour $x = l$ et $\dfrac{dy}{dx} = 0$ pour $x = l$ donnent successivement : $A = 0$,

$$\left.\begin{aligned} 0 &= B \sin kl - \frac{N'}{N}\, l, \\ 0 &= kB \cos kl - \frac{N'}{N}, \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{tg} kl = kl,$$

Le plus petit angle répondant à cette dernière équation est approximativement (1) de 257°,45, d'où

$$k_1 l = \frac{257{,}45}{360} \cdot 2\pi = 1{,}43\,\pi,$$

et $\quad l\sqrt{\dfrac{P_1 S}{EI}} = 1{,}43\,\pi,$

d'où $\qquad P_1 = 1{,}43 \times 1{,}43\,\pi^2 \dfrac{EI}{l^2 S} = 2{,}046\,\pi^2 \dfrac{EI}{l^2 S}.$

On peut admettre, pour plus de simplicité,

$$P_1 = 2\pi^2 \frac{EI}{l^2 S}.$$

L'ordonnée est maxima et égale à Y pour $\cos k_1 x = \cos k_1 l$ ou pour $k_1 x = \pi - 0{,}43\,\pi = 0{,}57\,\pi$ soit un angle de 102°,36'.

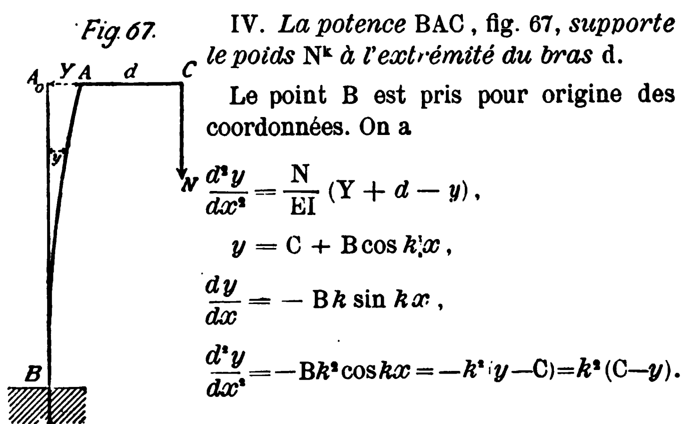


Fig. 67.

IV. *La potence* BAC, fig. 67, *supporte le poids* N^k *à l'extrémité du bras* d.

Le point B est pris pour origine des coordonnées. On a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{N}{EI}(Y + d - y),$$

$$y = C + B \cos kx,$$

$$\frac{dy}{dx} = -Bk \sin kx,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -Bk^2 \cos kx = -k^2(y - C) = k^2(C - y).$$

(1) Voir la note II à la fin du volume.

D'où $$k = \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad \text{et} \quad C = Y + d.$$

Conditions : pour $x = 0$, $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$; pour $x = l$, $y = Y$.

D'où $B = -\frac{d}{\cos kl}$ et $0 = Y + d + B = Y + d - \frac{d}{\cos kl}$;

d'où $$Y = d\left\{\frac{1}{\cos kl} - 1\right\}.$$

Enfin $y = \frac{d}{\cos kl}\left\{1 - \cos kx\right\}$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{kd}{\cos kl}\sin kx.$

V. *Les deux extrémités de la pièce sont encastrées et doivent rester sur l'axe des* x. Nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{N}{EI}(Y - y),$$

$$y = A\cos kx + B\sin kx + C,$$

$$\frac{dy}{dx} = -k(A\sin kx - B\cos kx),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2(C - y),$$

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}}, \qquad C = Y.$$

$y = 0$ pour $x = 0$ donne $0 = A + Y$;

$\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = 0$ donne $B = 0$;

on a donc $$y = Y(1 - \cos kx),$$

$$\frac{dy}{dx} = kY\sin kx.$$

$y = 0$ pour $x = l$ donne $\cos kl = 1$,

d'où $$kl = n2\pi \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{n^2 4\pi^2}{l^2} = \frac{PS}{EI},$$

et enfin $$P_1 = \frac{4\pi^2}{l^2}\frac{EI}{S}.$$

La condition $\frac{dy}{dx} = 0$ pour $x = l$ donne $0 = \sin kl$, ou $kl = n\pi$, évident puisque kl doit être un multiple de 2π.

132. Problème III. — *Supposant qu'il s'agisse d'une pièce à section circulaire, déterminer le plus grand rapport que l'on peut admettre entre la longueur et le diamètre de la pièce pour qu'il n'y ait pas de flexion.*

Quand même on pousserait la pression $P = \frac{N}{S}$ jusqu'à la charge de rupture par compression simple, la flexion n'est pas à craindre tant que cette pression ne dépasse pas la charge que nous avons appelée P_1 dans les problèmes qui précèdent. Il en résulte que le *maximum* du rapport $\frac{l}{d}$ est donné en fonction de la charge de rupture P_1

pour l'exemple I, par $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{E}{P_1}}$,

" " II, " $\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{E}{P_1}}$.

" " III, " $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{E}{P_1}}$,

" " V, " $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E}{P_1}}$.

Applications. — On peut admettre les chiffres suivants comme des moyennes convenables en pratique :

Fonte,	$\frac{E}{P_1} = \frac{10000}{63}$,	$\pi\sqrt{\frac{E}{P_1}} = 39{,}6.$
Fer,	" $\frac{20000}{22}$,	" 94,7.
Bois,	" $\frac{1100}{5}$,	" 46,6.

On en déduit pour le maximum du rapport $\frac{l}{d}$,

	Fonte.	Fer.	Bois.
Exemple I,	10	24	12
" II,	5	12	6
" III,	14	33	16
" V,	20	47	23

133. Problème IV. — *Chercher le solide d'égale résistance dans le cas d'une pièce pressée par ses abouts.* (Fig. 68.)

Dans une section CD quelconque, la fibre la plus fatiguée par compression est celle que nous avons désignée par la lettre D dans la figure et que nous supposons située à la distance z de la droite qui serait l'axe neutre s'il n'y avait que flexion seule. Pour cette fibre, on a (nos 130 et 131)

$$t = \frac{N}{S} + \frac{N}{I} y z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Ny}{EI} = 0,$$

et la tension t doit être la même pour tous les points de la fibre extérieure comprimée D'D''. Le problème consiste à chercher la fonction z de x qui remplit cette condition.

Nous en chercherons la solution pour deux cas : 1° celui où toutes les sections sont des figures géométriquement semblables; 2° celui où la section est rectangulaire, l'axe de flexion étant parallèle à la dimension constante a des rectangles.

Premier cas. — *Sections semblables.* — $I = c z^4$, $S = c' z^2$. Des équations générales on déduit :

$$y = c\left(\frac{t}{N} z^3 - \frac{z}{c'}\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = c\left(\frac{3t}{N} z^2 - \frac{1}{c'}\right) \frac{dz}{dx}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c\left(\frac{3t}{N} z^2 - \frac{1}{c'}\right) \frac{d^2z}{dx^2} + c\,\frac{6t}{N}\, z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2;$$

$$\frac{Ny}{EI} = \frac{1}{Ez}\left(t - \frac{N}{c' z^2}\right).$$

$$\left(\frac{3t}{N} z^2 - \frac{1}{c'}\right) \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{6t}{N}\, z \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{Ecz}\left(t - \frac{N}{c' z^2}\right) = 0.$$

Divisant tous les termes par $\frac{3t}{N}$ et faisant

$$\alpha^2 = \frac{N}{3tc'}, \ \beta^2 = \frac{N}{Ec}, \ \rho^2 = \frac{N}{tc'} = 3\alpha^2, \qquad (a)$$

on a $\quad (z^2 - \alpha^2)\frac{d^2 z}{dx^2} + 2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{\beta^2}{z}\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{z^2}\right) = 0.$

Introduisant le facteur $2(z^2 - \alpha^2)\frac{dz}{dx}$ et intégrant, on a (1)

$$(z^2 - \alpha^2)\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 2\beta^2\left(\frac{z^2}{6} - \frac{2}{3}\alpha^2 \log z^2 - \frac{\alpha^4}{2z^2} - C_1\right) = 0.$$

La constante C_1 sera déterminée par la condition résultant de la symétrie, que $\frac{dz}{dx} = 0$ au milieu de la pièce, là où la valeur de z passe par son maximum r,

$$\frac{r^2}{6} - \frac{2}{3}\alpha^2 \log r^2 - \frac{\alpha^4}{2r^2} - C_1 = 0.$$

Si nous prenons z^2 comme variable, nous aurons

$$x = C_2 \pm \frac{1}{2\beta\sqrt{2}}\int \frac{(z^2 - \alpha^2)\, d(z^2)}{\sqrt{\frac{2}{3}\alpha^2 z^2 \log z^2 + \frac{\alpha^4}{2} - \frac{z^4}{6} - z^2 C_1}}. \qquad (b)$$

Appelons maintenant ε une quantité telle que

$$z^2 = r^2(1 - \varepsilon), \qquad \rho^2 = r^2(1 - \varepsilon'); \qquad (c)$$

puisque ρ est la valeur que prend z aux extrémités de la pièce, là où il n'y a pas de flexion, ρ est la plus petite valeur de z et ε' la plus grande valeur de ε. Cela résulte des équations (a). La limite de ε' est l'unité; car pour $\varepsilon' = 1$ on aurait $\rho = 0$, ce qui entraînerait $N = 0$ et la disparition du problème tout entier. Cette remarque nous permet de substituer au $\log(1 - \varepsilon)$ les deux premiers termes de son développe-

(1) Cette méthode m'a été suggérée par mon collègue et ami M. E. Ronkar, à qui il m'est agréable d'adresser ici mes remerciements.

ment $\left(-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)\cdot$ D'autre part, il est possible de démontrer que la quantité sous le radical est toujours positive pour des valeurs de z^2 supérieures à ρ^2. En effet, soit $Y=f(z^2)$ cette quantité, on a

$$\frac{dY}{d(z^2)}=\frac{1}{6}\frac{(z^2-\rho^2)\left(\frac{\rho^2}{3}-z^2\right)}{z^4};$$

donc, pour toute valeur de z^2 supérieure à ρ^2, le coefficient différentiel de la fonction Y est négatif: il n'est nul que pour $z^2=\rho^2$. A partir de cette valeur, Y va donc en diminuant à mesure que z^2 grandit et ne devient nul que pour $z^2=r^2$.

Remplaçant donc, dans l'expression (b), $\log z^2$ par $\log r^2+\left(-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)$, supprimant le terme en ε^3 dans le développement obtenu par suite des notations (c), et faisant

$$A=\frac{2}{r^2-2\alpha^2}\left(\frac{r^2}{2}-2\alpha^2+\frac{3}{2}\frac{\alpha^4}{r^2}\right), \tag{d}$$

nous aurons

$$x=C_2\mp\frac{r\sqrt{3}}{2\beta\sqrt{r^2-2\alpha^2}}\int\frac{(r^2-\alpha^2-r^2\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sqrt{A\varepsilon-\varepsilon^2}},$$

qui donne

$$x=C_2\mp\frac{r\sqrt{3}}{2\beta\sqrt{r^2-2\alpha^2}}\left\{\frac{(r^2-\alpha^2)^2}{2(r^2-2\alpha^2)}\text{arc sin}\left(\frac{2\varepsilon}{A}-1\right)+r^2\sqrt{A\varepsilon-\varepsilon^2}\right\}.$$

Reste à déterminer la constante C_2. A cet effet plaçons l'origine au milieu de la pièce : à $x=0$ correspond $\varepsilon=0$ et et on a

$$C_2=\pm\frac{r\sqrt{3}}{2\beta\sqrt{r^2-2\alpha^2}}\frac{(r^2-\alpha^2)^2}{2(r^2-2\alpha^2)}\frac{3\pi}{2};$$

d'où $$x=\pm\frac{r\sqrt{3}}{2\beta\sqrt{r^2-2\alpha^2}}\left\{\frac{(r^2-\alpha^2)^2}{2(r^2-2\alpha^2)}\left[\frac{3\pi}{2}-\text{arc sin}\left(\frac{2\varepsilon}{A}-1\right)\right]-r^2\sqrt{A\varepsilon-\varepsilon^2}\right\}. \tag{74}$$

Si, dans cette équation, on fait $\varepsilon = \varepsilon'$ et $z = \rho$, x prendra la valeur $\pm \frac{l}{2}$; si, enfin on y fait $t = P_1$ suivant les notations adoptées dans ce chapitre, α, β, r étant remplacés par leurs valeurs (a) et (c), on arrivera à l'équation

$$\frac{l}{2\rho} = \sqrt{\frac{Ec}{P_1 C'}} \frac{1}{4} \frac{1}{(1+2\varepsilon')\sqrt{1-\varepsilon'}} \left\{ \frac{(2+\varepsilon')^2}{\sqrt{(1-\varepsilon')(1+2\varepsilon')}} \left[\frac{3\pi}{2} - \arcsin \frac{3\varepsilon'}{2+\varepsilon'} \right] - 6\varepsilon' \right\} \quad (75)$$

qui donne la limite du rapport $\frac{l}{2\rho}$ pour que la flexion ne se produise pas même sous la charge de rupture par compression P_1.

Cette limite, comme on le voit, dépend de la valeur que l'on assigne d'avance à ε' ou du rapport de r à ρ. C'est ce que n'a point entrevu Redtenbacher qui, du reste, part d'une hypothèse contradictoire puisqu'il suppose d'abord S constant pour déterminer ensuite son mode de variation.

Pour $\varepsilon' = 0$, on retrouve la limite déjà assignée pour le solide d'égale resistance, soit $\frac{l}{2\rho} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{E}{P_1}}$, au cas où la secion est circulaire, c'est-à-dire où $c = \frac{\pi}{4}$ et $c' = \pi$. Soit K cette limite de $\frac{l}{2\rho}$; pour $\varepsilon' = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ on trouve les valeurs respectives 1,268 K; 1,863 K; 3,277 K. D'où le tableau suivant :

ε'	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{l}{2\rho}$ pour la fonte	10	13	19	33
» le fer	24	30	44	77
» le bois	12	15	22	38

Les valeurs de ε' et du rapport $R = \frac{l}{2\rho}$ ne sont pas loin de suivre la loi exprimée par l'équation $R(1-\varepsilon') = \text{const.}$

La ligne ABCD fig. 69 est la méridienne du solide circulaire d'égale résistance pour $\varepsilon' = \frac{1}{2}\cdot$ Ses cordonnées sont

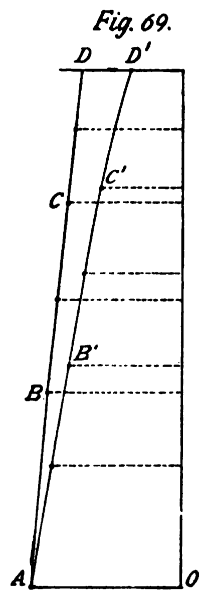


Fig. 69.

ε	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$z = r\sqrt{1-\varepsilon}$	20	18,98	17,88	16,74	15,48	14,14
x	0	16,49	25,58	38,30	50,87	$69 = \frac{l}{2}$.

Équation $Mx = 3\pi - 2 \arcsin(3{,}2\varepsilon - 1) - 0{,}96\sqrt{10\varepsilon - 16\varepsilon^2}$.

Deuxième cas. — *Section rectangulaire à base* a *constante*. Suivant la même marche que pour le premier cas, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{N}{az} + \frac{6y}{a^2 z}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &+ \frac{N}{E}\frac{12y}{a^3 z} = 0, \end{aligned}\right\} y = \frac{a^2}{6}\left(\frac{t}{N}z - \frac{1}{a}\right).$$

$$\frac{a^2}{6}\frac{t}{N}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2N}{Ea}\left(\frac{t}{N} - \frac{1}{az}\right) = 0;$$

facteur d'intégration, $\quad 2\frac{dz}{dx}$;

$$\frac{a^2}{6}\frac{t}{N}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{4N}{Ea}\left(\frac{t}{N}z-\frac{1}{a}\log z+C_1\right)=0;$$

$$x=C_2\pm\frac{a}{2N}\sqrt{\frac{Eat}{6}}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{1}{a}\log z-\frac{t}{N}z-C_1}}.$$

Soient : b la valeur de z ou hauteur de la section au milieu de la pièce ou pour $x=0$; b' aux extrémités ou pour $x=\pm\frac{l}{2}$, b' étant déterminé par l'équation $ab'=\frac{N}{t}$;

$$z=b(1-\varepsilon),\qquad b'=b(1-\varepsilon'),\qquad \log(1-\varepsilon)=-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2};$$

on aura

$$x=C_2\mp\frac{a^2b}{2N}\sqrt{\frac{Et}{3}}\int\frac{d\varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{abt}{N}-1\right)^2-\left(\varepsilon-\frac{abt}{N}+1\right)^2}};$$

$$x=C_2\mp\frac{a}{2\sqrt{3}}\frac{b}{b'}\sqrt{\frac{E}{t}}\arcsin\left[\varepsilon\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}-1\right].$$

$$0=C_2\mp\frac{a}{2\sqrt{3}}\frac{b}{b'}\sqrt{\frac{E}{t}}\frac{3\pi}{2};$$

$$x=\pm\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{t}}\frac{1}{1-\varepsilon'}\left\{\frac{3\pi}{2}-\arcsin\left[\varepsilon\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'}-1\right]\right\}\quad(76)$$

Si, dans cette équation, on fait $\varepsilon=\varepsilon'$, $t=P_1$, x prendra la valeur $\pm\frac{l}{2}$ et l'on arrivera à l'équation suivante, qui donne le maximum de $\frac{l}{a}$ pour une valeur choisie de ε ;

$$\frac{l}{a}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{P_1}}\frac{1}{1-\varepsilon'}\left[\frac{3\pi}{2}-\arcsin(-\varepsilon')\right].$$

Pour $\varepsilon' = 0$, on a le solide prismatique pour lequel la limite $\frac{l}{a} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{E}{P_1}} = K$. Pour $\varepsilon' = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ respectivement, la limite devient 1,12 K; $\frac{4}{3}$ K; 1,84 K; l'interpolation par le procédé graphique la donnera pour d'autres valeurs de ε'. On en déduit le tableau suivant :

ε'	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$\frac{l}{a}$ pour la fonte	11	13	15	21
» le fer	27	30	36	50
» le bois	13	15	18	25

La ligne AB′C′D′, fig. 69, est le profil du solide rectangulaire d'égale résistance pour $\varepsilon' = \frac{1}{2}$ et est tracée au moyen de l'équation

$$Mx = 3\pi - 2 \text{ arc sin } (\varepsilon - 1).$$

Les coordonnées sont

ε	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$z = b(1 - \varepsilon)$	20	18	16	14	12	10
$x =$	0	29,70	42,39	52,40	61,10	$69 = \frac{l}{2}$.

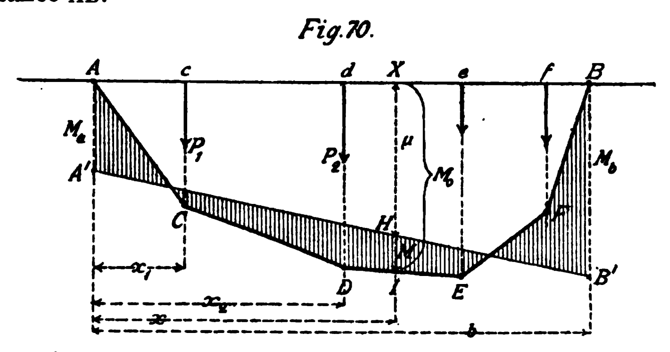
CHAPITRE X.

PIÈCE DROITE REPOSANT SUR PLUS DE DEUX APPUIS (1).

134. Problème I. — *Étant donnés les moments de flexion en deux points* A *et* B *d'une pièce droite ainsi que les charges extérieures appliquées entre ces deux points, trouver le moment de flexion en un point intermédiaire quelconque.*

Soient (fig. 70) : M_a et M_b les moments de flexion aux points A et B respectivement; P_1, P_2, ... les charges extérieures appliquées aux distances respectives x_1, x_2, ... du point A que nous prenons pour origine; T_a l'effort tranchant en A; x l'abscisse d'une section quelconque par rapport à laquelle nous cherchons le moment de flexion M; b la distance $\overline{AB}$.

Fig. 70.



Puisque le moment de flexion M est égal (nº 38) à la somme de tous les moments des forces depuis le point A jusqu'à la section considérée, nous avons

$$M = M_a + T_a x + \Sigma_a^x P_n (x - x_n);$$

d'où

$$M_b = M_a + T_a b + \Sigma_a^b P_n (b - x_n);$$

---

(1) Dans ce chapitre nous suivons, en l'appropriant à notre plan général, la méthode si féconde et si remarquable que M. Clerc a fait connaître dans les *Mémoires de la Société des Ingénieurs civils* de Paris, août 1880.

et, en éliminant T_a qui est inconnu,

$$M = M_a + \left(M_b - M_a\right)\frac{x}{b}$$

$$- x\sum_a^b P_n \frac{b - x_n}{b} + \sum_a^x P_n (x - x_n). \qquad (77)$$

Telle est la quantité cherchée. Mais, pour l'exprimer plus simplement, faisons

$$M_0 = x\sum_a^b P_n \frac{b - x_n}{b} - \sum_a^x P_n (x - x_n), \qquad (78)$$

en remarquant que M_0 serait le moment de flexion au point X de la poutre considérée si elle était sciée aux points A et B et soumise uniquement aux réactions R_a et R_b d'appuis placés en A et B et aux charges extérieures données P_n. En effet on aurait en ce cas $R_a = \sum_a^b P_n \frac{b - x_n}{b}$, et par suite M_0 est bien le moment de flexion que nous venons de définir.

Puisque l'on donne complétement les charges extérieures P_n, il sera toujours possible de déterminer R_a et R_b et par suite de tracer le diagramme des moments de flexion. (Voir note I à la fin du volume.) Le diagramme des moments de flexion M_0 est donné (fig. 70), c'est le polygone ACDEFB. S'il y avait des charges uniformément réparties, les côtés correspondants du polygone seraient curvilignes; la question que nous traitons n'en serait pas changée.

Nous avons mene (fig. 70) la droite A′B′ ayant pour ordonnées extrêmes M_a et M_b et dont l'équation est par consequent

$$\mu = M_a + (M_b - M_a)\frac{x}{b}. \qquad (79)$$

On a donc $\overline{XI} = M_0$; $\overline{XH} = \mu$ et, par conséquent, au signe près, $M = M_0 - \mu = \overline{IH}$. Remarquons qu'il convient de donner le signe + au moment M_0 parce qu'il a nécessairement pour effet d'augmenter la flexion dans le sens où elle se produit à la poutre sciée. Dès lors on peut écrire

$$M = M_0 - \mu, \qquad (80)$$

ou

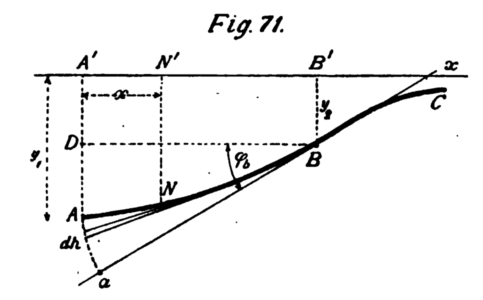
$$M = x \sum_a^b P_n \frac{b - x_n}{b} - \sum_a^x P_n (x - x_n) - \left[M_a + (M_b - M_a) \frac{x}{b} \right].$$

Dans la fig. 70, les hachures figurent les valeurs de M, c'est-à-dire du moment de flexion, et ainsi donnent complétement la solution graphique du problème proposé

135. Problème II. — *Étant donnés les moments de flexion* M *entre deux points* A *et* B *quelconques, ainsi que les ordonnées de ces points quand la pièce est fléchie, chercher les angles que la touchante à l'élastique fait avec l'axe des* x *en ces points* A *et* B.

Soient (fig. 71) : ABC l'élastique; A'B' l'axe des x;

Fig. 71.



$b = \overline{A'B'}$; A' l'origine; y_1 et y_2 les ordonnées des points A et B respectivement; x l'abscisse d'un point N quelconque de la courbe situé entre A et B. Nous appelons I le moment d'inertie de la section en un point quelconque, moment qui peut être variable; E le coefficient d'élasticité; φ, l'angle que la touchante à l'élastique fait avec l'axe des x en un point quelconque et φ_a et φ_b les valeurs particulières de cet angle aux points A et B respectivement. Nous supposons qu'en tous les points de la pièce fléchie, la valeur de l'angle φ est toujours assez petite pour que l'on puisse considérer l'arc DAa comme un arc de cercle ayant φ_b pour angle au centre et $b = \overline{DB}$ pour rayon. L'arc $\overline{Aa} = h$ a été tracé par le point A se mouvant dans l'hypothèse que la pièce est sciée en A, encastrée en B dans la direction de sa touchante Ba,

et soustraite à tout effort extérieur. Il suit de cette hypothèse que

$$dh = x\,d\varphi \qquad \text{et par suite } \overline{\mathrm{A}a} - h = \int_b^a x\,d\varphi.$$

De plus, par hypothèse, $\overline{\mathrm{D}a} = b\varphi_b$;

donc $$y_2 + b\varphi_b - y_1 = \int_b^a x\,d\varphi \qquad (81)$$

et $$\varphi_b = \frac{y_1 - y_2}{b} + \frac{1}{b}\int_b^a x\,d\varphi. \qquad (82)$$

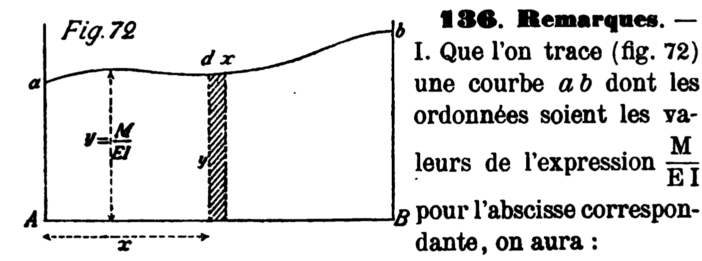
Or $\frac{d\varphi}{dx}$ est ce que nous avons appelé $\frac{\Psi}{\mathrm{L}}$ dans le chapitre de la flexion simple et dont la valeur $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}$ est donnée par l'équation (18). Nous pouvons donc écrire

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\Psi}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \qquad \text{et} \qquad d\varphi = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\,dx.$$

Donc $$\varphi_b = \frac{y_1 - y_2}{b} + \frac{1}{b}\int_b^a \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\,x\,dx. \qquad (83)$$

De plus $$\varphi_b - \varphi_a = \int_b^a d\varphi = \int_b^a \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right) dx, \qquad (84)$$

équation qui donnera φ_a, étant connu φ_b.



136. Remarques. — I. Que l'on trace (fig. 72) une courbe ab dont les ordonnées soient les valeurs de l'expression $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}$ pour l'abscisse correspondante, on aura :

$$\int_b^a \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right) dx = \mathbf{S}_b^a \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right) = \text{l'aire de la courbe } ab \text{ entre A et B};$$

et $\int_b^a \left(\frac{M}{EI}\right) x dx = \mathbf{M}_b^a \left(\frac{M}{EI}\right)$ = le moment de la surface $\mathbf{S}_b^a \left(\frac{M}{EI}\right)$ par rapport à l'axe Aa désigné par l'indice supérieur.

Si l'on connaît M, E et I en chaque point d'une poutre, on voit que l'on peut obtenir aisément, par un simple procédé graphique, les valeurs de φ_b et de φ_a qui, avec les nouvelles notations que nous venons d'introduire, s'écriront

$$\varphi_b = \frac{y_1 - y_2}{b} + \frac{1}{b} \mathbf{M}_b^a \left(\frac{M}{EI}\right). \tag{85}$$

$$\varphi_a = \varphi_b - \mathbf{S}_b^a \left(\frac{M}{EI}\right). \tag{86}$$

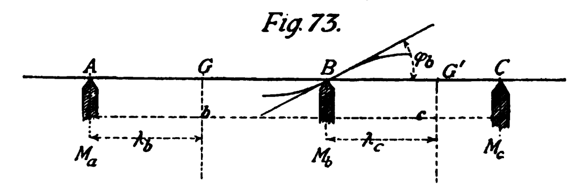
II. Au cas particulier où $EI = \text{const.}$, la courbe ab (fig. 72) a ses ordonnées proportionnelles à celles marquées par des hachures, fig. 70, et les équations précédentes deviennent

$$\varphi_b = \frac{y_1 - y_2}{b} + \frac{1}{bEI} \mathbf{M}_b^a (M), \tag{87}$$

$$\varphi_a = \varphi_b - \frac{1}{EI} \mathbf{S}_b^a (M). \tag{88}$$

137. Problème III. — *Chercher une relation entre les moments de flexion* M_a, M_b, M_c *sur trois appuis de niveau et les charges extérieures appliquées entre les appuis extrêmes.* (A cette relation on a donné le nom de *théorème des trois moments.*)

Fig. 73.



Soient, fig. 73, A, B et C les appuis pour lesquels $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. La relation demandée s'obtiendra en appliquant les équations (85) et (86) aux deux travées AB et BC successivement et en éliminant l'angle φ_b, puis remplaçant M par sa valeur déduite de l'équation (80).

On a ainsi, d'après l'équation (85) où l'on fait $y_a = y_b = y_c = 0$,

dans la travée b, $\qquad \varphi_b = \frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right)$,

" " " c, $\qquad \varphi_b = -\frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right)$.

d'où
$$\frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}\right) = 0,$$

équation qui devient, après substitution de la valeur (80) de M,

$$\mathrm{M}_a\left\{\frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) - \frac{1}{b^2}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right)\right\} + \mathrm{M}_b\left\{\frac{1}{b^2}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right) + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right)\right\}$$
$$+ \mathrm{M}_c\left\{\frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right)\right\} = \frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{EI}}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{EI}}\right). \tag{89}$$

138. Remarques. — I. D'après les notations adoptées, on a

$$\mathbf{M}_b^a\left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right) = \int_b^a \left(\frac{x}{\mathrm{EI}}\right) x\,dx = \int_b^a \left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) x^2\,dx = \mathbf{I}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right).$$

Cette expression représente *le moment d'inertie* de la surface de la courbe dont les ordonnées seraient égales à $\frac{1}{\mathrm{EI}}$, pris entre A et B et par rapport à l'axe A. C'est pourquoi nous la représentons par le symbole $\mathbf{I}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right)$.

Avec ces notations l'équation (89) s'écrit

$$\mathrm{M}_a\left\{\frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) - \frac{1}{b^2}\,\mathbf{I}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right)\right\} + \mathrm{M}_b\left\{\frac{1}{b^2}\,\mathbf{I}_b^a\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) + \frac{1}{c^2}\,\mathbf{I}_b^c\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right)\right\}$$
$$+ \mathrm{M}_c\left\{\frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) - \frac{1}{c^2}\,\mathbf{I}_b^c\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right)\right\} = \frac{1}{b}\,\mathbf{M}_b^a\left(\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{EI}}\right) + \frac{1}{c}\,\mathbf{M}_b^c\left(\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{EI}}\right). \tag{90}$$

II. *Au cas particulier* où EI = const., on a

$$\mathbf{M}\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\int x\,dx = \frac{1}{\mathrm{EI}}\,\frac{x^2}{2},$$
$$\mathbf{I}\left(\frac{1}{\mathrm{EI}}\right) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\int x^2 dx = \frac{1}{\mathrm{EI}}\,\frac{x^3}{3},$$
$$\mathbf{M}\left(\frac{\mathrm{M}_0}{\mathrm{EI}}\right) = \frac{1}{\mathrm{EI}}\int \mathrm{M}_0\,x\,dx = \frac{1}{\mathrm{EI}}\,\mathrm{S}\lambda,$$

en appelant S la surface de la courbe ACDEB (fig. 70) dont les ordonnées sont les valeurs de M_0, et λ la distance du centre de gravité de cette surface au point A. Ainsi dans ce cas l'équation (90) devient

$$bM_a + 2(b+c)M_b + cM_c = 6\left\{\frac{S_b\lambda_b}{b} + \frac{S_c(c-\lambda_c)}{c}\right\}. \quad (91)$$

La valeur du second membre de cette équation peut toujours être calculée ou déterminée à priori.

III. *Si les charges extérieures sont uniformément réparties sur chaque travée* et égales à p_1 kil. par mètre courant pour la première; p_2 pour la seconde; si l_1 et l_2 sont les longueurs des deux travées; enfin si l'on désigne les moments aux points A, B, C par les indices 0, 1, 2; on a

$$S_b = \frac{p_1 l_1^3}{12}, \qquad S_c = \frac{p_2 l_2^3}{12},$$

$$\lambda_b = \frac{l_1}{2}, \qquad c - \lambda_c = \frac{l_2}{2};$$

et par suite

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = \frac{p_1 l_1^3}{4} + \frac{p_2 l_2^3}{4}. \quad (92)$$

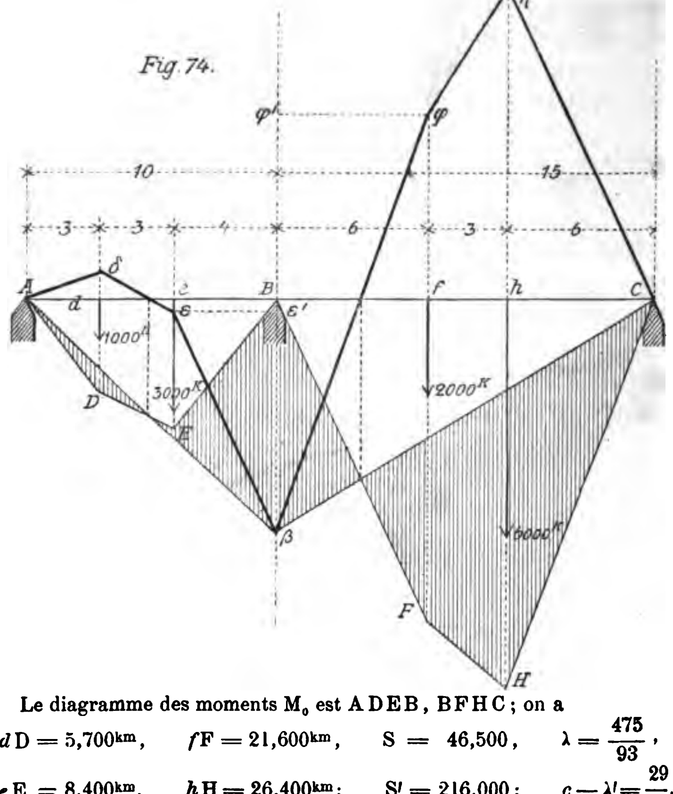
Telle est l'équation de Clapeyron, dont celle de M. Clerc (90) est une ingénieuse généralisation.

IV. *Si les appuis n'étaient pas de niveau*, au second membre de l'équation (90) il faudrait ajouter

$$\frac{y_a - y_b}{b} + \frac{y_c - y_b}{c}, \quad (93)$$

expression dans laquelle les y représentent les ordonnées des points d'appuis désignés par la même lettre que l'indice.

129. Exemple I. — Le système complètement donné fig. 74. On suppose $EI = \text{const.}$



Le diagramme des moments M_0 est ADEB, BFHC; on a

dD $= 5{,}700^{km}$, $\quad f$F $= 21{,}600^{km}$, $\quad$ S $= 46{,}500$, $\quad \lambda = \frac{475}{93}$,

eE $= 8{,}400^{km}$, $\quad h$H $= 26{,}400^{km}$; $\quad$ S' $= 216{,}000$; $\quad c - \lambda' = \frac{29}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{S\lambda}{b} = 23{,}750 \\ \frac{S'(c-\lambda)}{c} = 104{,}400 \end{array}\right\} \text{somme} = 128{,}150.$$

Ensuite $\quad M_a = 0$, $M_b = 0$; $2 \times 25 \times M_b = 6 \times 128{,}150$;

d'où $\quad M_b = 15{,}378^{km} = \overline{B\beta}$.

On trouve enfin pour les réactions aux appuis :

$R_a = \frac{d\delta}{3} = 362^k{,}2$. . . . . $362^k{,}2$

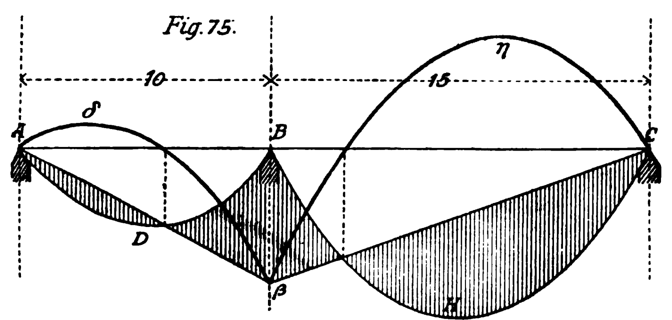
$R_b = R'_b + R''_b = \frac{\beta\varepsilon'}{4} + \frac{\beta\gamma'}{6} = 3637{,}8 + 4625{,}2 =$ . . . $8263^k{,}0$

$R_c = \frac{h\eta}{6} = 3374{,}8$. . . . . $3374^k{,}8$

Vérification. . . . . $\Sigma R = \Sigma P =$ . . . . $\overline{12{,}000^k}$

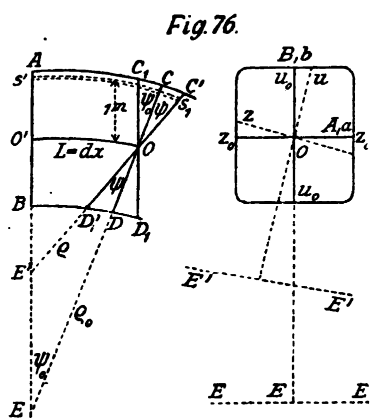
Exemple II. — La même poutre que la précédente mais uniformément chargée sur toute sa longueur à raison de 400 kil. par mètre courant. La figure 75 est faite à la même échelle que la précédente. Le diagramme des moments M_0 se compose des deux arcs de parabole ADB et BHC dont les ordonnées maxima ont pour valeurs $5{,}000^{km}$ et $11{,}250^{km}$ respectivement. Le moment $M_1 = \overline{B\beta} = 8{,}750^{km}$. Les réactions des appuis sont respectivement

$$R_a = 1{,}125^k;\ R_b = 6{,}458^k{,}33;\ R_c = 2{,}416^k{,}67;\ \Sigma R = 10{,}000\ k.$$



CHAPITRE XI.

DÉFORMATIONS DES PIÈCES PRIMITIVEMENT COURBES.



140. Problème I. — *On demande de chercher la courbure affectée par la fibre moyenne d'une pièce homogène, primitivement courbe, soumise à des efforts donnés.* (Fig. 76.)

Nous examinerons deux cas : 1° la courbe donnée de la fibre moyenne est plane et reste plane après déformation ; 2° la fibre moyenne a une double courbure.

1er cas, *fibre moyenne plane.* — Soient AB et CD deux sections normales indéfiniment voisines entre lesquelles la fibre moyenne OO′ est courbe, ayant pour centre de courbure le point E, pour rayon de courbure $\rho_0 = \overline{EO}$, pour longueur primitive $\overline{OO'} = L = dx$. Le moment M des forces extérieures amène la section CD dans la position C′D′ par rapport à AB restée fixe et alors la pièce a fléchi, le centre de courbure est venu en E′ et le rayon de courbure est $\overline{E'O} = \rho$. Menons C_1D_1 parallèle à AB et soient $\Psi_0 = O'EO = C_1OC$, $\Psi = COC'$. L'allongement proportionnel de la fibre ss' située à un mètre de distance de la fibre moyenne O dans la section CD sera

$$\frac{\Psi}{L} = \frac{\Psi_0 + \Psi}{L} - \frac{\Psi_0}{L}.$$

Or on a $$\frac{\Psi_0 + \Psi}{L} = \frac{1}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\Psi_0}{L} = \frac{1}{\rho_0}.$$

Donc $$\frac{\Psi}{L} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}.$$

D'autre part, en vertu de l'équation (18), on a $\frac{\Psi}{L} = \frac{M}{EI}$.

Donc $$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI}. \tag{94}$$

Cette équation résoud le problème posé puisque M, I et ρ_0 sont des quantités données, fonctions de x.

2e cas. — *Fibre moyenne à double courbure.* — Les forces extérieures données sont appliquées en des points quelconques. La fig. 76 est supposée dans le plan osculateur de la courbe donnée, c'est-à-dire le plan qui renferme les centres de trois sections indéfiniment rapprochées, O, O′, O″. Les deux sections normales AB et CD se coupent suivant une droite perpendiculaire à ce plan et projetée en E; centre de courbure de la courbe primitive. Le plan osculateur ou plan de la figure coupe la section normale CD suivant une droit Ou_0 prolongement de EO; supposons tracée dans le plan de cette section, une droite Oz_0 perpendiculaire à Ou_0:

ces deux droites Ou_0, Oz_0, avec la direction OO' de la touchante à la fibre moyenne à l'état primitif, forment un système orthogonal d'axes des coordonnées.

Nous supposons que la section normale après déformation est restée plane, que la fibre moyenne OO' a conservé sa longueur primitive $L = dx$, que la flexion n'est pas accompagnée de torsion, enfin que la distance u' de la fibre la plus écartée de l'axe neutre a une longueur négligeable en présence de celle du rayon de courbure primitif ρ_0.

Cela étant, après déformation, le nouveau plan osculateur coupe la section dans sa nouvelle position suivant une droite Ou faisant l'angle β avec Ou_0; Oz, perpendiculaire à Ou fera aussi l'angle β avec Oz_0, et ρ sera le nouveau rayon de courbure. Considérons une fibre qui était à la distance u_0 de l'axe Oz_0 avant déformation et qui est ensuite à la distance u de l'axe Oz après déformation. Entre u_0 et u existent les relations

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cos\beta + z_0 \sin\beta, \\ z &= z_0 \cos\beta - u_0 \sin\beta. \end{aligned} \qquad (a)$$

La longueur primitive de la fibre considérée est $L\left(1 + \frac{u_0}{\rho_0}\right)$, sa longueur après flexion, $L\left(1 + \frac{u}{\rho}\right)$; donc son allongement proportionnel est

$$i = \frac{\frac{u}{\rho} - \frac{u_0}{\rho_0}}{1 + \frac{u_0}{\rho_0}} = \frac{u}{\rho} - \frac{u_0}{\rho_0},$$

(en negligeant $\frac{u_0}{\rho_0}$ en présence de l'unité); sa tension,

$$t = E\left(\frac{u}{\rho} - \frac{u_0}{\rho_0}\right), \qquad (b)$$

ou

$$t = E\left\{u_0\left(\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right) + z_0 \frac{\sin\beta}{\rho}\right\}. \qquad (95)$$

Les moments de cette tension pour toute la section auront pour valeurs: $\Sigma z_0 t s$ par rapport à Ou_0 et $\Sigma u_0 t s$ par rap-

port à $O z_0$. Ces moments sont égaux aux moments des forces extérieures par rapport aux mêmes axes. De là les équations d'équilibre que nous allons écrire en adoptant les notations suivantes: composantes des forces extérieures A, B, C; coordonnées de leurs points d'application a, b, c; I, J, K moments et produit d'inertie; I', moment d'inertie polaire.

Axe $O z_0$ A, a, $I = \Sigma u_0^2 s$, $K = \Sigma u_0 z_0 s$.
» $O u_0$ B, b, $J = \Sigma z_0^2 s$,
» OO' ou Ox C, c, $I' = \Sigma (u_0^2 + z_0^2) s$.

Nous aurons $L = \Sigma (Cb - Bc) = \Sigma u_0 t s$, (z_0)
$M = \Sigma (Ca - Ac) = \Sigma z_0 t s$, (u_0)
$N = \Sigma (Ab - Ba) = 0$ par hypothèse (x_0)

(De même $\Sigma A = 0$, $\Sigma B = 0$, $\Sigma C = 0$ par hypothèse). Donc

$$\begin{aligned} L &= E \left\{ \left(\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) I + \frac{\sin\beta}{\rho} K \right\}, \\ M &= E \left\{ \left(\frac{\cos\beta}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) K + \frac{\sin\beta}{\rho} J \right\}, \\ N &= G I' \frac{\varphi}{dx} = 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Il est bien entendu que, si l'extrémité de la pièce n'est pas libre, on comprend sous le signe Σ les composantes A', B', C' de l'effort qui y maintient la pièce.

Les équations (96) donnent

$$\begin{aligned} \frac{\sin\beta}{\rho} &= \frac{KL - IM}{E(K^2 - IJ)}. \\ \frac{\cos\beta}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0} + \frac{KM - JL}{E(K^2 - IJ)}. \end{aligned} \tag{97}$$

En éliminant β entre ces deux équations on aura une relation entre ρ et les quantités données, qui formera la solution de la question; mais l'introduction de l'expression différentielle du rayon de courbure rend en général les calculs inextricables.

141. Remarques. — I. En éliminant ρ et β entre les équations (95) et (97) on arrive à la valeur suivante de t :

$$t = \frac{M(Ku_0 - Iz_0) - L(Ju_0 - Kz_0)}{K^2 - IJ}. \tag{98}$$

Pour l'axe neutre, $t = 0$ et l'on trouve que cet axe neutre est conjugué dans l'ellipse centrale avec la droite de la section par rapport à laquelle la somme des moments des forces ts est nulle, droite qui appartient au plan du couple de flexion résultant de L et M.

II. Si ΣC n'est pas égale à zéro, outre la flexion, il y a une extension d'où résulte la tension $t' = \frac{\Sigma C}{S}$ qu'il faut ajouter à t. Nous représentons par S^{mq} l'aire de la section considérée.

Enfin si le moment de torsion N^{km} n'était pas nul, on aurait

$$N = GI' \frac{\varphi}{dx}.$$

142. Problème. — *Étant donnée la forme primitive de la pièce, calculer le travail nécessaire pour produire une flexion donnée.*

Au cas où il n'y a qu'une flexion simple, nous avons vu équation (28) que le travail cherché a pour valeur

$$T = \frac{1}{2E} \int \frac{M^2}{I} dx.$$

D'autre part, l'équation (94) donne $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M}{EI}$.

Donc
$$T = \frac{E}{2} \int \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2 I dx. \tag{99}$$

S'il y a en outre une tension totale N résultante des forces extérieures estimées suivant la touchante à la fibre moyenne au point O, on aura en combinant les équations (10) et (29), avec (94),

$$T = \frac{1}{2E} \int \left\{ \frac{N^2}{S} + E^2 I \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)^2 \right\} dx. \tag{100}$$

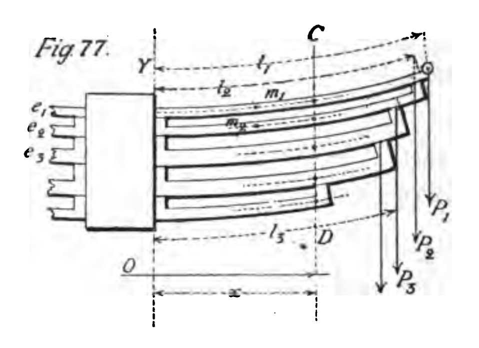
143. Exemple. — La pièce est primitivement droite, c'est-à-dire que $\frac{1}{\rho_0} = 0$; son moment d'inertie I est constant; sa longueur est l; on la courbe en cercle dont le rayon $R = \frac{l}{2\pi} = \rho =$ const. En ce cas on a

$$T = \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{dx}{R^2} = \frac{EIl}{2R^2} = 2\pi^2 E \frac{I}{l}.$$

CHAPITRE XII.

THÉORIE DES RESSORTS.

144. Ressorts à lames. — Nous les supposons composés d'une série de bandes d'acier légèrement courbes, d'égale largeur et de faible épaisseur. La section de chaque lame prise isolément est un rectangle; la hauteur de ce rectangle ou l'épaisseur e de la lame peut varier d'une lame à l'autre. A l'état primitif, toutes les lames sont courbées en arc de cercle de même rayon assez grand. Les lames superposées (fig. 77) ne se touchent que par leurs milieux et leurs extré-



mités où l'on a ménagé des ergots. Soient : P_1, P_2, P_3,.... les efforts appliqués aux extrémités des lames; P_1, un effort extérieur donné et P_2, P_3,.... les pressions des lames supérieures sur les ergots des lames inférieures; l_1, l_2,.... les longueurs des lames comptées seulement jusqu'au plan OY de leur ligature; e_1, e_2,.... leurs épaisseurs; b, leur largeur commune; R, leur rayon de courbure primitif commun; ρ_1, ρ_2,.... leurs rayons de courbure après déformation, aux points m_1, m_2,.... dont les coordonnées sont (x, y_1), (x, y_2)....; x, l'abscisse d'une section CD quelconque faite dans le ressort.

Aux sections $m_1, m_2, m_3, \ldots$ on a pour les moments des forces extérieures :

$$P_1(l_1 - x) - P_2(l_2 - x) = P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2)x,$$

. . . .

$$P_{n-1}(l_{n-1} - x) - P_n(l_n - x) = P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n - (P_{n-1} - P_n)x.$$

En vertu des équations (94) et (25) on a

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2)x = E\frac{b e_1^3}{12}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_1}\right),$$

$$P_2 l_2 - P_3 l_3 - (P_2 - P_3)x = E\frac{b e_2^3}{12}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_2}\right),$$

. . . .

$$P_n l_n \qquad - \quad P_n x \qquad = E\frac{b e_n^3}{12}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho_n}\right);$$

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{b e_1^2 f_1}{6},$$

$$P_2 l_2 - P_3 l_3 = \frac{b e_2^2 f_2}{6},$$

. . . .

$$P_{n-1} l_{n-1} - P_n l_n = \frac{b e_{n-1}^2 f_{n-1}}{6}.$$

Les deux conditions pratiques à réaliser sont : 1° de faire travailler également toutes les lames, c'est-à-dire de faire égales toutes les tensions f, afin que les chances de rupture soient les mêmes pour toutes les bandes; 2° de faire en sorte que, si les lames n'avaient pas d'ergot, sous charge elles se toucheraient sur toute leur longueur comme à l'état primitif; c'est-à-dire que pour une même valeur de x, tous les rayons ρ doivent être égaux. En vertu des précédentes équations, ces conditions conduisent aux résultats suivants :

$$e_1 = e_2 = \ldots\ldots\ldots = e_n = e, \qquad (a)$$

$$P_1 - P_2 = P_2 - P_3 = P_3 - P_4 = \ldots\ldots = p, \qquad (b)$$

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = P_2 l_2 - P_3 l_3 = \ldots\ldots = \frac{b e^2 f}{6}. \qquad (c)$$

Si l'on ajoute membre à membre les n équations (c) et ensuite les $(k-1)$ premières, on obtient successivement

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6} be^2 f, \qquad (d)$$

$$P_1 l_1 - P_k l_k = (k-1)\frac{be^2 f}{6}; \qquad (e)$$

et en ajoutant les $k-1$ premières équations (b).

$$P_k = P_1 - (k-1)p. \qquad (f)$$

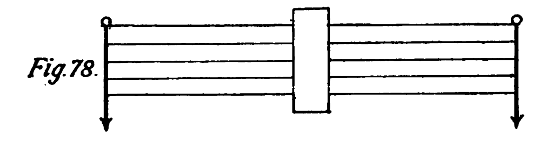
Éliminant f et P_k entre ces trois dernières équations,

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1-(k-1)\frac{p}{P_1}}. \qquad (g)$$

Dans cette expression de la longueur de la $k^{\text{ième}}$ lame, la valeur de $\frac{p}{P_1}$ peut varier arbitrairement depuis zéro jusque $\frac{1}{n}$ seulement, puisqu'aucune lame ne peut être plus longue que la première l_1. Si donc on représente par γ un nombre entier ou fractionnaire plus grand que l'unité et si l'on pose $\frac{p}{P_1} = \frac{1}{\gamma n}$, on aura

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}\cdot\frac{1}{\gamma}}. \qquad (101)$$

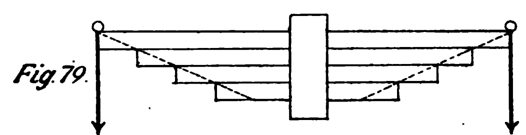
145. Si on fait $\gamma = 1$, sa limite inférieure, toutes les lames sont d'égale longueur et le ressort est dit *rectangulaire;* la différence des pressions sur deux lames consécutives est constante et égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de la pression P_1. (Voir fig. 78.)


Fig. 78.

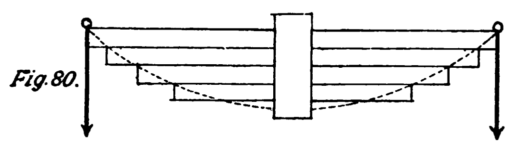
146. Si on fait $\gamma = \infty$, sa limite supérieure, on obtient

$$\left.\begin{aligned} l_k &= l_1\left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \\ l_{k+1} &= l_1\left(1 - \frac{k}{n}\right), \end{aligned}\right\} \quad l_k - l_{k-1} = \frac{l_1}{n};$$

la différence entre les longueurs de deux lames consécutives est constante et égale à la $n^{\text{ième}}$ partie de la longueur de la première lame; le ressort est *trapézoïdal* (fig. 79). De plus, $p = 0$, c'est-à-dire que toutes les pressions P sont égales; tous les rayons de courbure sont indépendants de la valeur de x et par suite toutes les lames déformées sont courbées en arc de cercle et la tension est la même sur toute la longueur de chaque lame. C'est dans cette importante propriété de travailler également dans toutes leurs parties, que réside la *supériorité* de ce genre de ressorts.


Fig. 79.

147. Pour des valeurs de γ comprises entre 1 et ∞, le lieu des extrémités des lames supposées primitivement droites est un arc d'hyperbole (fig. 80). C'est pourquoi Redtenbacher leur a donné le nom de ressorts *hyperboliques*.


Fig. 80.

148. Problème. — *Chercher la flèche de flexion de la première lame.*

Rappelons les précédentes équations :

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2)\,x = E\,\frac{be^3}{12}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right),$$

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{be^2 f}{6},$$

$$P_1 - P_2 = p = \frac{P_1}{n\gamma};$$

d'où $$\frac{be^2f}{6} - \frac{P_1 x}{n\gamma} = \frac{Ebe^3}{12}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho}\right).$$

Si l'on suppose que la courbure soit et reste faible, on peut poser $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ et alors on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{R} - \frac{2f}{Ee} + \frac{12P_1 x}{Ebe^3 n\gamma}. \qquad (102)$$

A la rigueur cette équation n'est applicable qu'à la partie de la lame comprise entre $x = 0$ et $x = l_2$; mais dans la pratique, la différence de longueur des deux premières lames est toujours petite, et l'on peut supposer, sans commettre d'erreur préjudiciable, que l'équation (102) est valable jusque $x = l_1$. On a successivement

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{R} - \frac{2f}{Ee}\right)x + \frac{6P_1}{Ebe^3 n\gamma}x^2,$$

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2f}{Ee}\right)\frac{x^2}{2} + \frac{2P_1}{Ebe^3 n\gamma}x^3 + y_0.$$

y_0 est l'ordonnée à l'origine de l'élastique. L'ordonnée y_1 à l'extrémité est la valeur que prend y quand on fait $x = l_1$. A l'état primitif $P_1 = 0$, $f = 0$ et $y'_1 = \frac{l_1^2}{2R} + y_0$. On a donc pour la flèche de flexion $Y = y'_1 - y_1$.

$$Y = \frac{fl_1^2}{Ee} - \frac{2P_1 l_1^3}{Ebe^3 n\gamma}; \qquad (103)$$

ou, en éliminant P_1 à l'aide de l'équation (d)

$$Y = \frac{fl_1^2}{Ee}\left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right). \qquad (104)$$

149. Problème. — *Étant donnés : l'effort* P_1, *la longueur* l_1 *de la première lame, la tension maxima* f, *le coefficient d'élasticité* E, *la largeur* b *des lames, la flèche* Y; *calculer l'épaisseur* e *des lames, leur nombre* n *et la longueur* l_k *d'une lame quelconque.*

Les équations (104), (*d*), et (101) donnent :

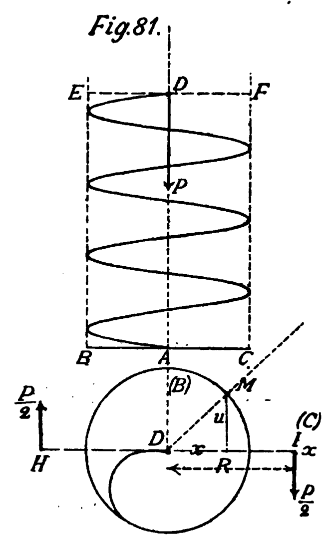
$$e = \frac{f l_1^2}{EY}\left(1 - \frac{1}{3\gamma}\right),$$

$$n = \frac{6 P_1 l_1}{f b e^2},$$

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}\frac{1}{\gamma}}.$$

150. Exemple. — On donne $P_1 = 600^k$; $l_1 = 0^m,50$; $f = 44^k$ par mill. carré ; $E = 30\,000^k$ par mill. carré ; $b = 0^m,05$; $Y = 0^m,05$; le ressort est rectangulaire, $\gamma = \infty$.

On trouve $e = 0^m,0073$; $n = 15$; $l = l_1 = 0^m,50$.



151. Ressort à hélice cylindrique. — Le ressort (fig. 81) est appuyé sur n plan BAC, et, à l'extrémité supérieure D, le fil qui le forme est ramené vers le centre pour y recevoir la charge P. Le rayon du cylindre, mesuré au centre du fil, étant primitivement r, le moment de l'effort P par rapport à une section quelconque du fil, est égal à Pr, et conserve cette valeur si on néglige la légère déformation amenée par l'application de la force extérieure. L'effet de celle-ci est une torsion des sections normales du fil, accompagnée d'une flexion que nous supposons négligeable. Si nous appelons I_0 le moment d'inertie polaire de la section du fil : L, la distance de deux sections indéfiniment voisines ; φ, comme ci-devant, l'angle de torsion indéfiniment petit ; nous aurons, d'après l'équation (37),

$$\frac{\varphi}{L} = \frac{Pr}{GI_0}.$$

Si l est la longueur d'une spire et p le pas primitif, on a

$$l = \sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}.$$

Soit maintenant $dy = r\varphi$ la quantité dont le point d'application de la force P s'est abaissé pendant que la torsion φ s'opérait; et appelons $d\alpha$ l'angle compris entre deux plans passant par l'axe du cylindre et par les extrémités de l'élément $L = dl$ de l'hélice. Nous aurons

$$dl = L = d\alpha \sqrt{r^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}$$

et $$dy = r\varphi = \frac{Pr^2}{GI_0} L = \frac{Pr^2}{GI_0} \sqrt{r^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}\, d\alpha,$$

et, pour une spire

$$\frac{y}{l} = i = \frac{Pr^2}{GI_0}. \qquad (a)$$

Or, en vertu de l'équation (47), nous avons

$$\frac{Pr}{I_0} = \frac{t}{\rho}, \qquad (b)$$

ρ étant la distance du centre à la fibre la plus éloignée.

La combinaison des deux équations (a) et (b) donne

$$i = \frac{y}{l} = \frac{t}{G}\frac{r}{\rho}. \qquad (105)$$

Le travail effectué par spire, que nous appelons T, est

$$T = \frac{Py}{2} = \frac{Pli}{2} = \frac{t}{2G}\frac{r}{\rho} Pl; \qquad (106)$$

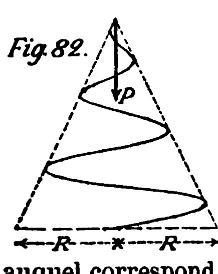
et le travail par kil. de matière en jeu

$$T_1 = \frac{t}{2\Delta G}\frac{r}{\rho}\frac{P}{S} = \frac{t^2}{2\Delta G}\left(\frac{I_0}{S\rho^2}\right). \qquad (107)$$

Pour une section circulaire, $\frac{I_0}{S\rho^2} = \frac{1}{2}$,

" " " rectangulaire, $\frac{1}{3}$;

les conclusions sont donc les mêmes qu'au n° 103, c'est-à-dire que la section circulaire est préférable.



152. Ressort à hélice conique, représenté en élévation et en plan fig. 82 et 83. Soient : λ, la longueur totale du ressort, Y la flexion totale, n le nombre de spires, d la distance entre deux spires mesurée suivant un rayon, $R = nd$ le plus grand rayon, $r = \frac{\alpha}{2\pi} d$ un rayon quelconque auquel correspond une flexion y ; nous aurons :

$$\lambda = n\pi R; \qquad y = \frac{P}{GI_0}\left(\frac{d}{2\pi}\right)^3 \frac{\alpha^4}{4}.$$

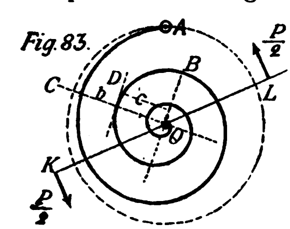
Pour le ressort entier $\alpha = 2\pi n$ et

$$Y = \frac{PR^3}{GI_0}\frac{\pi n}{2} = \frac{PR^2\lambda}{2GI_0},$$ et, en vertu de l'équation (b),

$$\frac{Y}{\lambda} = \frac{t}{2G}\frac{R}{\rho}.$$

$$T = \frac{PY}{2} = \frac{t^2}{4G}\frac{\lambda}{\rho}\frac{I_0}{\rho}; \qquad T_1 = \frac{t^2}{4\Delta G}\left(\frac{I_0}{S\rho^2}\right). \qquad (108)$$

Par ce ressort on fait donc un moins bon emploi de la matière que par le précédent ; cela s'explique par le fait que la tension maxima n'arrive à la valeur t que dans une seule section, celle pour laquelle le moment a sa plus grande valeur PR. Il convient donc de donner au ressort à hélice conique la forme d'égale résistance. (Voir n° 103.)



153. Ressort plan à spirale. — Soit fig. 83 un tel ressort fixé en A et recevant en O par l'intermédiaire d'un levier KL l'action d'un couple dont le moment est PR. Nous supposons que la flexion à une section D quelconque s'opère autour d'un des axes principaux d'inertie, celui qui est perpendiculaire au plan de la figure et que nous avons nommé axe des z_0 dans le chapitre précédent. Le moment de flexion au point D est égal à la somme des moments de toutes les forces extérieures

qui agissent depuis ce point D jusqu'à l'extrémité O de la pièce. Or, parmi ces forces, se trouvent d'abord P, dont le moment est PR, et ensuite les forces nécessaires pour fixer le point O et qui seraient égales aux réactions des pivots ; ces dernières nous les nommerons B et C, en conservant les mêmes notations qu'au chapitre précédent. De même par b et c nous représenterons les coordonnées du point D. La composante B aurait pour effet d'allonger le prisme élémentaire de longueur dl et ayant sa base en D ; nous négligerons cet effet et n'aurons égard qu'à la flexion seulement. Le moment de flexion est $PR + Bc - Cb$.

En vertu de la première des équations (96) dans laquelle nous faisons $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$, et $I = \text{const.}$, nous aurons

$$PR + Bc - Cb = EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right), \qquad (a)$$

d'où $$PR\int dl + B\int c\,dl - C\int b\,dl = EI\int\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)dl. \qquad (b)$$

Étendons ces sommes à toute la longueur l du ressort et appelons b' et c' les coordonnées du centre de gravité du ressort entier, nous aurons

$$PRl + (Bc' - Cb')\,l = EI\int\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right)dl. \qquad (c)$$

Remarquons que $\frac{dl}{\rho}$ est l'angle que nous avons appelé Ψ dans la théorie générale de la flexion. Soit $\int\Psi = \alpha_1$, et le second membre de l'équation (c) deviendra $EI(\alpha_1 - \alpha_0) = EI\alpha$, expression dans laquelle α représente l'angle dont la spirale a tourné sous l'action du couple PR, en d'autres termes l'angle dont le levier KL a tourné pour fléchir la spirale. L'équation (c) devient donc

$$PR + Bc' - Cb' = \frac{EI\alpha}{l}.$$

Au cas particulier où le centre de gravité du ressort coïncide avec le point O, les coordonnées b' et c' sont nulles et l'équation (109) devient

$$PR = \frac{EI\alpha}{l}, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{PRl}{EI}. \qquad (109)$$

Ces conditions se présentent presque exactement quand le ressort est composé d'un grand nombre de spires.

En appelant f la tension de la fibre la plus fatiguée par flexion et u' la demi-épaisseur de la lame, on aura pour calculer la section du ressort, en vertu de l'équation (25),

$$\frac{I}{u'} = \frac{PR}{f},$$

ensuite $\alpha = \frac{f}{E}\frac{l}{u'}$, d'où $\frac{\alpha u'}{l} = \frac{f}{E}$;

$$T = \frac{P\alpha R}{2} = \frac{f^2}{2E}\left(\frac{I}{u'}\frac{l}{u'}\right), \qquad T_1 = \frac{f^2}{2\Delta E}\left(\frac{I}{su'^2}\right). \quad (110)$$

Pour une section circulaire, $T_1 = \frac{1}{8}\frac{f^2}{\Delta E}$;

" " " rectangulaire, $T_1 = \frac{1}{6}\frac{f^2}{\Delta E}$;

le ressort rectangulaire est donc le plus économique.

154. Ressort à hélice cylindrique tordu. — Au lieu d'appliquer un effort P suivant l'axe au ressort cylindrique fig. 81, supposons qu'on le torde par le moyen d'un levier IH et des deux forces $\frac{P}{2}$ donnant lieu au couple PR. L'une des extrémités, A, devra être solidement fixée par une force dont nous supposerons nulle la composante parallèle à l'axe du cylindre. Nous supposons le pas de l'hélice assez petit en comparaison du rayon r du cylindre pour que l'on puisse considérer comme normale à l'hélice la section faite par un plan contenant l'axe du cylindre, que nous prenons pour axe des z_0; la direction du bras du levier DI nous la prenons pour axe des x, et une perpendiculaire pour axe des y. Les composantes de la force qui sert à fixer le point A seront C suivant l'axe des x et B suivant l'axe des y. Le moment de flexion par rapport à une section M quelconque ayant pour coordonnées x, y, z, sera donc

$$PR + Cy - Bx.$$

Supposant le moment d'inertie des sections I constant,

l'axe neutre axe principal d'inertie, $K = 0$ et $\sin\beta = 0$, on a, d'après la première des équations (96),

$$PR + Cy - Bx = EI\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right). \qquad (a)$$

Procédant comme dans le cas du ressort précédent, multipliant par dl tous les termes de l'équation (a), intégrant de 0 à l, appelant c', (x) et b', (y) les coordonnées du centre de gravité du ressort entier dans le plan des xy; $\int_0^l \frac{dl}{\rho} = \alpha_1$; $\int_0^l \frac{dl}{\rho_0} = \alpha_0$; $\alpha_1 - \alpha_0 = \alpha$; nous avons

$$PR + Cb' - Bc' = \frac{EI\alpha}{l}. \qquad (111)$$

Lorsque le centre de gravité du ressort est un point de l'axe du cylindre, $b' = 0$, $c' = 0$, et l'angle α est proportionnel au moment PR, qualité importante dans la pratique et surtout dans celle de l'horlogerie. Mais le centre de gravité du ressort ne peut rester sur l'axe que si l'on ramène par un mécanisme convenable le point A et le point d'attache du levier, constamment sur la surface cylindrique dont le rayon diminue par la torsion et augmente par le déroulement. Un grand nombre de spires et une légère torsion établissent à peu près cette situation sans le recours d'un mécanisme spécial. Dans ce cas on peut admettre la formule

$$PR = \frac{EI}{l}\alpha; \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{PRl}{EI}. \qquad (112)$$

et les résultats sont identiques à ceux du n° précédent.

155. Comparons le ressort à hélice cylindrique comprimé (n° 151) et agissant par torsion au même ressort tordu et agissant par flexion (n° 154). Remarquons d'abord que l'on a, pour les métaux dont on fait les ressorts, approximativement, $t = \frac{4}{5} f$; $G = \frac{2}{5} E$; $\frac{t^2}{G} : \frac{f^2}{E} = 1{,}6$;

Le ressort comprimé emmagasine au kil. un travail plus grand que le ressort tordu dans le rapport de 3,2 : 1 pour une section circulaire et de 1,6 : 1 pour une section rectangulaire.

156. Remarques sur la construction des ressorts en hélice. — I. D'après Redtenbacher, on peut admettre les coefficients d'élasticité suivants, exprimés en kil. par millim. carré.

	E	G
Fil de fer.	18000	7200
Acier fondu	20000	9600
Acier de qualité moyenne . .	30000	12000
Acier de qualité ordinaire. .	20000	8000

La trempe a pour effet d'élever considérablement la tension maxima à laquelle on peut faire travailler l'acier, mais elle ne modifie pas sensiblement les coefficients d'élasticité. Ainsi des ressorts en bon acier bien trempé peuvent fonctionner fort bien sous une tension qui, pour la fibre la plus fatiguée, s'élève jusqu'à 110 kil. par millimètre carré.

Nous avons, dans ce qui précède, négligé la légère flexion qui accompagne la torsion et la légère variation du diamètre du cylindre. Dans ces conditions les formules ci-dessus ne sont pas toujours applicables si du moins on prétend conserver les mêmes coefficients d'élasticité. Nos expériences nous ont amené à la conclusion que, pour les cas ordinaires, ces formules donneraient des résultats acceptables en pratique, si l'on a soin de faire varier le coefficient d'élasticité G depuis 8000 pour les sections rondes ou carrées jusque 2000 pour les sections très plates, par exemple dont l'épaisseur n'est que le dixième de la largeur.

II. Pour tirer d'un ressort tout le parti possible, il faut le faire travailler de manière que, lorsqu'il a atteint sa plus grande déformation admissible (extension ou compression), la tension de la fibre la plus fatiguée soit arrivée à son maximum. Cette condition économique donne une troisième relation à laquelle il convient d'avoir égard dans la construction des ressorts.

En effet, si c'est dans le sens du raccourcissement de l'hélice que l'effort P agit, les spires doivent se toucher lorsque la tension maxima t est atteinte. Si donc la section du fil est circulaire, son rayon étant ρ, il faut que le pas qui était p

primitivement sous la tension 0, devienne égal à 2ρ sous la tension maxima t, de manière que la flexion par spire

$$y = p - 2\rho.$$

On a donc $$i = \frac{Pr^2}{GI_0} = \frac{y}{l} = \frac{p - 2\rho}{\sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}}. \qquad (113)$$

Si c'est dans le sens de l'extension du ressort que P agit, les spires doivent se toucher à l'état primitif lorsque la tension est nulle, et leur pas est alors égal à 2ρ; le pas, en grandissant sous l'effort appliqué au ressort, prendra une valeur p quand l'effort sera devenu P et alors la tension de la fibre la plus fatiguée doit atteindre sa valeur maxima t. La flexion par spire sera donc encore égale à $p - 2\rho$ et l'on arrive à la même formule (113).

III. Les remarques précédentes nous conduisent à des conséquences importantes au point de vue de la construction des ressorts. Supposons que l'on donne le fil dont on veut faire un ressort, c'est-à-dire les trois quantités ρ, t, G; et de plus l'effort P^k qui doit produire une déformation totale Y^m. Ces données suffisent pour déterminer le rayon r ou le rapport $\frac{r}{\rho}$, le pas p ou le rapport $\frac{p}{r}$, et le nombre n de spires. En effet faisons $Q = \frac{P}{\pi\rho^2}$ et les équations (a) et (b) n° 151, (105) et (113), dans lesquelles nous introduisons la valeur $\frac{\pi\rho^4}{2}$ de I_0, nous conduisent aux suivantes :

L'équation (b), $$\frac{r}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{t}{Q}. \qquad (A)$$

« (105) ou (a) $$i = \frac{y}{l} = \frac{1}{2}\frac{t^2}{GQ} \qquad (B)$$

» (113) $$\frac{1}{2}\frac{t^2}{GQ} = \frac{\frac{p}{2\rho} - 1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}\frac{t^2}{Q^2} + \left(\frac{p}{2\rho}\right)^2}}. \qquad (C)$$

De l'équation (A) on déduira la valeur du rayon r du ressort.
" " (C) " " " " " pas p " "
" " (B) " " " " de la flexion par spire,
c'est-à-dire de y puisque $l = \sqrt{(2\pi r)^2 + p^2}$ est déterminé du moment que p et r le sont.

On a ensuite $\quad Y = ny = n\,(p - 2\rho),$

d'où
$$n = \frac{Y}{p - 2\rho}$$

157. Applications — I. Avec un fil rond de 10 millim. de diamètre, on veut composer un ressort à hélice cylindrique qui, sous une charge de 314 kil., se comprime de 100 millimètres. La tension ne doit pas dépasser 60 kil. par millimètre carré, et le coefficient d'élasticité $G = 8000$ kil. par mill. carré.

On trouve d'abord $Q = 4$ kil. par mill. carré et de (A) on déduit $\frac{r}{\rho} = 7{,}5$ d'où $2r = 75^{mm}$.

Ensuite $i = \frac{9}{160}$, et l'équation (C) donne $p = 23^{mm}\,\frac{1}{3}$ soit 24^{mm}.

Enfin $p - 2\rho = 14$ et $n = \frac{100}{14} = 7\,\frac{1}{7}$ spires.

II. Avec un fil carré de $6^{m/m}$ de côté, on veut composer un ressort à hélice cylindrique qui, sous une charge de 180^k, se comprime de $30^{m/m}$. La tension ne doit pas dépasser 60^k par mill. carré, et le coefficient d'élasticité $G = 8000^k$.

Pour une section rectangulaire, on a

$$S = bh, \qquad Q = \frac{P}{bh} \qquad \text{et} \qquad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2};$$

de même que ci-devant,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{t}{3Q}, \qquad i = \frac{t^2}{3GQ}, \qquad \frac{t^2}{3GQ} = \frac{\frac{p}{h} - 1}{\sqrt{\left(2\pi\frac{r}{h}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2}}.$$

On trouve $\quad Q = 5, \quad \frac{r}{\rho} = 4; \quad 2r = 33^{mm},92;$

ensuite $\quad i = 0{,}03, \quad \frac{p}{h} = 1{,}535, \quad p = 9{,}21;$

enfin $\quad n = \frac{Y}{p - h} = \frac{30}{3{,}21} = 9^{mm}\,\frac{1}{3}.$

III. Avec une lame rectangulaire dont les dimensions sont $b = 10^{m}/_{m}$, $h = 1^{m}/_{m}$, on fait un ressort cylindrique qui, sous une charge de 40^{k}, s'allonge de $51^{m}/_{m}$. La tension ne doit pas dépasser 30^{k} par mill. carré, et le coefficient d'élasticité $G = 2000$.

On trouve $\rho = 5{,}025$; $Q = 4$; $\frac{r}{\rho} = 2{,}5$;

$r = 12^{mm},56$; $i = 0{,}0375$; $p = 4$; $n = \frac{51}{3} = 17.$

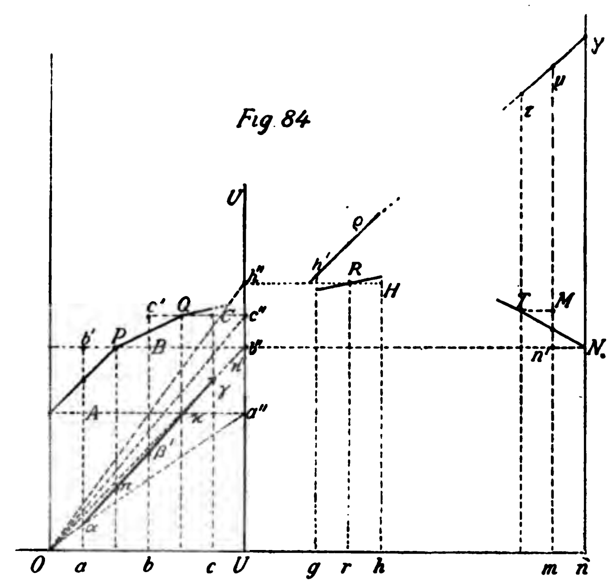
NOTE I.

Dans le supplément à la livraison de septembre 1882 de MATHÉSIS, M. P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, a publié la note suivante :

SUR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION GRAPHIQUE DE ROSSIN.

M. Rossin, ingénieur de la marine française, avait imaginé, pour son usage personnel, une méthode très simple d'intégration graphique, que M. de Lisleferme vient de faire paraître dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. M. Solin a publié un travail semblable, en 1872, dans les *Mémoires de la Société des sciences de Prague*, et M. Massau, en 1878, dans les *Annales de l'Association des ingénieurs sortis des écoles spéciales de Gand*. Malgré ces publications antérieures, nous croyons utile d'analyser la note de M. de Lisleferme, à cause de son extrême simplicité.

Étant donnée une courbe ayant pour équation $y = fx$, et représentée graphiquement, il s'agit de trouver, d'une manière graphique aussi, la courbe intégrale ayant pouré quation $Y = \int_0^x fx\, dx$. Pour cela, remplaçons d'abord la première par un polygone à peu près équivalent, inscrit ou circonscrit, ou bien encore intermédiaire entre un polygone inscrit et un polygone circonscrit. L'aire de ce polygone (fig. 84) a'PQ....TN peut être divisée en trapèzes suivant la méthode habituelle; chacun de ces trapèzes est équivalent à la somme de deux rectangles ayant pour hauteurs respectivement chacune des deux bases du trapèze et pour base la demi-hauteur de celui-ci. Il est facile de voir que le 2e et le 3e rectangles ainsi obtenus ont la même hauteur et peuvent être réunis en un seul; qu'il en est de même du 4e et du 5e, du 6e et du 7e, et ainsi de suite. Si le polygone substitué à l'aire primitive a n côtés et est subdivisé, par conséquent, en n trapèzes, il sera donc équivalent à la somme de $(n + 1)$ rectangles ayant respectivement pour hauteurs les ordonnées des $(n + 1)$ sommets du polygone.



Soient $O a A a'$, $a b B b'$, $b c C c'$,....., $m n N n'$, ces rectangles, les points O, a, b, c,....., n étant situés sur l'axe des x; soient aussi a'', b'', c'',....., n'', les projections de A, B, C,....., N sur la droite U U parallèle à Ox et à une distance O U égale à l'unité (1). Joignons $O a''$, $O b''$,..... $O n''$. Menons $O\alpha$ parallèle à $O a''$, rencontrant $A a$ en α; $\alpha\beta$ parallèle à $O b''$, rencontrant $B b$ en β;..... et ainsi de suite jusque $\mu\nu$, parallèle à $O n''$ et rencontrant $N n$ en ν.

Il est facile de voir que l'ordonnée $a\alpha$ est égale à l'aire du premier rectangle, $b\beta$ à celle des deux premiers, $c\gamma$ à celle des trois premiers,....., $n\nu$ à celle des $(n+1)$ rectangles. Il y a plus, si l'ordonnée $r\rho$ d'un point ρ quelconque du polygone $O\alpha\beta$..... $\mu\nu$ divise l'un des rectangles $g h H h'$ en deux parties $g r R h'$, $r h H R$, $r\rho$ est égale à l'aire des rectangles qui précèdent cette ordonnée, plus la portion $g r R h'$ du rectangle $g h H h'$.

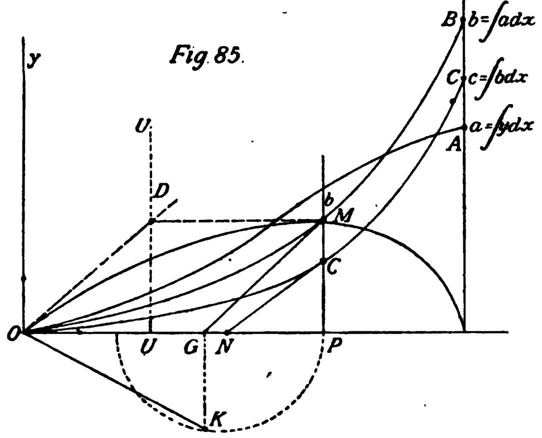
Le polygone $O\alpha\beta\gamma$.... $\mu\nu$ est donc le polygone intégral du polygone à angles rentrants $O a' A b' B$..... $M n' N n O$. Mais les ordonnées de ce polygone $O\alpha\beta\gamma$... . $\mu\nu$ ne donnent l'aire du polygone primitif $O a' P Q$..... T N,

---

(1) Le manque de place pour la figure nous a obligé à nous écarter ici un peu du texte de l'auteur.

qu'aux points O, π, $\varkappa$,..... τ, ν, projections de O, P, Q,....., T, N sur la ligne brisée O $\alpha\beta\gamma$..... $\mu\nu$. Entre ces points, l'ordonnée de O $\alpha\beta\gamma$..... $\mu\nu$ est évidemment un peu en retard ou en avance sur l'aire du polygone O P Q ... T N. Donc en traçant une courbe située au-dessus ou au-dessous du polygone O $\alpha\beta\gamma$.... $\mu\nu$, et passant par O, π, $\varkappa$, ... τ, ν (par suite, tangente à ce polygone intégral en ces points), on aura une courbe convenable comme intégrale de a' P Q ... T N, et, approximativement, de $y = fx$.

Dans sa note parue dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (6e année, 1882), M. de Lisleferme ajoute : (Voir fig. 85.)



Centre de gravité. — La courbe des aires peut être traitée comme la courbe primitive et donne lieu à une nouvelle représentée par $b = \int a\,dx$. $\left(\text{La première intégration a donné } a = \int y\,dx\right)$. Voici son utilité : proposons-nous de trouver la distance à l'axe Oy du centre de gravité de la portion de surface O M P. Cette distance étant désignée par g et l'aire par a, on a d'une manière générale

$$ag = \int xy\,dx,$$

ou, à cause de $\quad y\,dx = da,$

$$ag = \int x\,da = ax - \int a\,dx = ax - b;$$

d'où $\quad g = x - \dfrac{b}{a}$

Or, si l'on mène la tangente au point b, la sous-tangente sera

$$GP = \frac{b}{\frac{db}{dx}} = \frac{b}{a}$$

et par suite $$\overline{OG} = g.$$

Pour mener cette tangente avec plus d'exactitude, on remarquera qu'elle est parallèle à O D.

Moment d'inertie. — Nous ne savons plus au juste comment était traitée par Rossin la question du moment d'inertie, mais en se laissant guider par l'esprit de la méthode on reconnaît aisément que ce devait être de la manière suivante :

Construisons la courbe des c, intégrale de celle des b, nous aurons :

$$c = \int b\,dx.$$

L'expression du moment d'inertie par rapport à l'axe Oy est :

$$I = \int x^2 y\,dx.$$

Il est facile de voir que, d'après les relations précédentes, on a successivement :

$$\begin{aligned} I &= \int x^2\,da = a\,x^2 - 2\int a x\,dx \\ &= ax^2 - 2\int x\,db = ax^2 - 2\left(bx - \int b\,dx\right) \\ &= ax^2 - 2bx + 2c, \end{aligned}$$

d'où, en posant $I = K^2 a$, il vient

$$K^2 = x^2 - 2\frac{b}{a}x + 2\frac{b}{a}\frac{c}{b}.$$

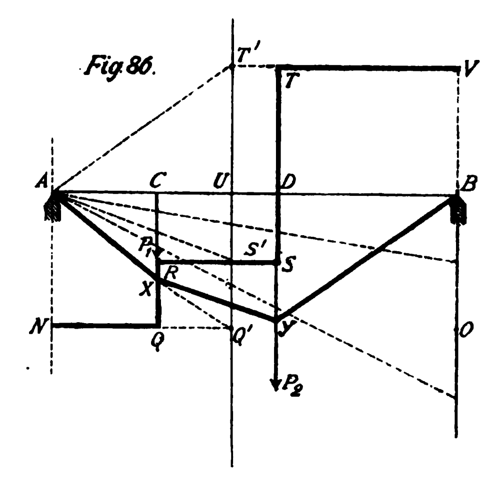
Désignons les sous-tangentes GP, NP par m et n ; décrivons une circonférence ayant pour centre le point N, et NP pour rayon. On aura :

$$K^2 = x^2 - 2mx + 2mn = (x-m)^2 + m(2n-m) = g^2 + \overline{GK}^2 = \overline{OK}^2$$

Et par suite $$\overline{OK} = K.$$

Application. — La méthode de Rossin peut être appliquée avec succès à la recherche du moment de flexion dans une poutre reposant sur deux appuis et chargée d'une manière quelconque. Comme exemple prenons celui de la figure 74.

Rappelons d'abord que le moment de flexion est égal à l'aire du diagramme de l'effort tranchant (n° 80), et traçons, fig. 86, le diagramme



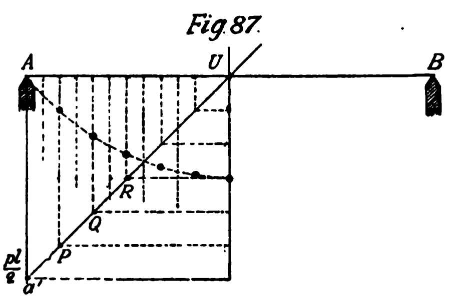
de l'effort tranchant pour la portion AB de la poutre considérée isolément. A cet effet cherchons d'abord les réactions des appuis, en décomposant chaque force donnée P_1 et P_2 en deux parallèles appliquées aux appuis suivant la méthode graphique bien connue. Nous obtenons ainsi AN et BO pour représenter des forces égales et opposées aux réactions à la même échelle que CP_1 représente 1000 kil. et DP_2, 3000 kil. Nous traçons le diagramme de l'effort tranchant NQRSTV, dont l'aire est égale au moment de flexion ; c'est donc le polygone intégral du polygone de l'effort tranchant qui sera le diagramme du moment de flexion.

Suivant la méthode de Rossin, à une distance AU prise pour unité, traçons une verticale; projetons en Q' le point Q, traçons AQ', et AX sera un côté du polygone intégral cherché. Projetons de même le point S en S'; traçons AS' et XY parallèle à AS'; XY sera un second côté du polygone cherché. Continuons de même; projetons T en T', traçons AT' et YB sa parallèle qui doit fermer le polygone en B, puisque le moment de flexion à l'extrémité de la poutre doit être nul. Cette propriété fournit un moyen de contrôler les opérations graphiques. Le polygone cherché est donc AXYB.

Au cas où la charge serait uniformément répartie, le diagramme de l'effort tranchant serait une oblique (fig. 40) coupant la poutre en son milieu; celui du moment de flexion, une parabole que la méthode de Rossin permet de tracer en cherchant un nombre quelconque de ses points.

Dans la fig. 87, nous avons pris la demi-longueur de la poutre pour unité ; dès lors, l'ordonnée maxima de la parabole est égale à la moitié de la longueur qui représente la réaction $\frac{pl}{2}$ au point A.

Fig. 87.



NOTE II.

SUR LA RÉSOLUTION GRAPHIQUE DES ÉQUATIONS.

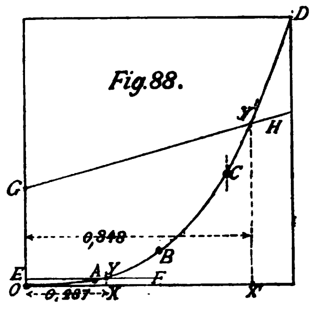
Soit à résoudre l'équation

$$^{3} - a x - b = 0.$$

Celle du n° 107 affecte cette forme. On la divise en deux

$$y_1 = x^3, \qquad y_2 = a x + b\,;$$

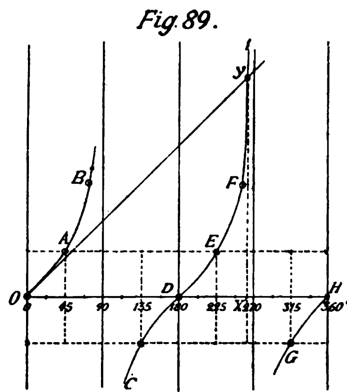
on construit les deux courbes représentées par ces équations. Les abscisses des points de rencontre de ces deux courbes sont les valeurs des inconnues.



L'exemple du n° 107,

$$d^3 - 0{,}0008\,d = 0{,}02325,$$

est traité figure 88. La courbe OBCD est celle des valeurs de y_1 étendue depuis $x = 0$ jusque $x = 1$ seulement parce que l'on voit de suite que la racine cherchée est comprise entre zéro et l'unité. La droite EF représente la fonction y_2. Elle rencontre la courbe au point Y dont l'abscisse est 0,287 solution de la question. Le degré d'approximation dépend évidemment de l'exactitude du dessin. La droite GH a été tracée pour résoudre l'équation $x^3 = 0{,}25\,x + 0{,}401625$. Le tracé donne $OX' = 0{,}85$.



La figure 89 a pour but de résoudre l'équation donnée au n° 131, IV,

$$x = \operatorname{tg} x.$$

Nous la décomposons en deux

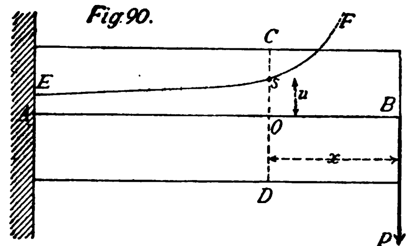
$$y_1 = \operatorname{tg} x, \qquad y_2 = x.$$

Nous avons représenté 360° ou 2π par 40 millimètres ; l'unité est donc représentée par $\frac{40}{2\pi} = 6^{mm},366$. Au moyen des tables des lignes trigonométriques naturelles, on construit aisément la courbe O A B, C D Y, G H dont l'équation est $y_1 = \operatorname{tg} x$. La droite $y_2 = x$ est inclinée à 45° sur l'axe O H. L'abscisse du point de rencontre Y, estimée en degrés, donne la solution 257°,45.

NOTE III.

LIGNES D'ÉGALE TENSION.

Il peut être utile dans certains cas de connaître les lignes d'égale tension dans un solide soumis à la flexion. Soit fig. 90 une pièce encastrée à l'une de ses extrémités A et soumise à l'autre extrémité B à une force unique P^k. Le plan de la figure est un plan de symétrie. Le couple Px agit dans ce plan supposé contenir un des axes principaux d'inertie. La pièce est prismatique et homogène. La tension au point s de la section CD, situé à la distance u du centre d'élasticité O est donnée par la formule (24)



$$t = \frac{Px}{I} u.$$

Si l'on fait t constant en même temps que l'on fait varier les coordonnées x et u du point s, l'équation

$$xu = \frac{\mathrm{I}t}{\mathrm{P}} = \text{const.}$$

est celle d'une ligne d'égale tension. Au cas particulier que nous considérons, c'est un arc d'hyperbole rapportée à ses asymptotes, EsF.

NOTE IV.

SUR LE CALCUL DES COURROIES.

Dans la transmission du mouvement circulaire d'un arbre à un autre par une courroie sans fin, l'effort tangentiel à faire se déduit de deux données : le travail à transmettre, N chev.; la vitesse v^{m} par seconde de l'axe de la courroie. Q^{k} étant cet effort circonférentiel, on a

$$75\,\mathrm{N} = \mathrm{Q}v, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{Q} = \frac{75\,\mathrm{N}}{v}.$$

L'effort tangentiel maximum que la courroie peut transmettre dépend de la tension donnée aux brins pendant le montage, et, en pratique, on fait cette tension suffisante pour que l'effort tangentiel possible reste supérieur à l'effort réel Q à transmettre. De combien? la pratique en dicte les limites convenables. Quoi qu'il en soit, l'effort Q étant à transmettre avec une vitesse v, il en résulte pour le brin conducteur de la courroie une tension *qui dépend de la vitesse* v. Le but de la présente note est de montrer *comment* cette tension dépend de la vitesse et de rechercher la vitesse la plus économique, c'est-à-dire celle qui correspond au *minimum de poids* de la courroie pour la transmission d'un travail donné. La solution de cette question est donnée dans la suite des problèmes que nous allons énoncer et résoudre.

Appelons T^{k} la tension qu'il faut donner au brin conducteur d'une courroie pour qu'elle soit en équilibre strict avec la tension t de l'autre brin et la résistance tangentielle Q supposée appliquée au même rayon r^{m} que les deux autres forces. Nous aurons d'abord

$$\mathrm{T}r = tr + \mathrm{Q}r \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{T} = t + \mathrm{Q}; \qquad (a)$$

Ces tensions T et t sont modifiées et augmentées par la vitesse de la courroie, mais leur différence doit toujours rester égale à Q. Nous verrons de combien ci-après. Pour le moment, ne considérant que les tensions T et t

à l'instant de l'équilibre strict, nous cherchons à établir une seconde relation entre T et t et le frottement de la courroie sur la poulie. Les deux problèmes suivants servent à résoudre cette question.

Problème I. — *Une courroie glisse sur un tambour fixe à base circulaire; la tension* t *du brin qui s'enroule est donnée; la tension de l'autre brin,* T, *est à chercher; on donne à cet effet le coefficient* f *de frottement de la courroie sur la poulie et l'angle d'enroulement* $\alpha = \frac{S}{r}$.

Si le tambour avait une base polygonale, deux côtés consécutifs du polygone faisant entre eux l'angle ω et les tensions étant respectivement t et $t + dt$, on aurait

$$t + dt = t \cos \omega + ft \sin \omega.$$

Ce résultat est applicable à une base circulaire si l'on y substitue $d\alpha$ à sin ω et l'unité à cos ω. Donc

$$t + dt = t(1 + fd\alpha)$$

$$dt = tfd\alpha$$

$$T = te^{f\alpha} = tm, \quad \text{où} \quad e = 2{,}71828$$

Problème II. — *Une courroie roule sur une poulie circulaire qui tourne autour de son axe. La différence entre les tensions* T *et* t *des deux brins est telle que la résistance tangentielle Q est exactement tenue en équilibre. On demande* T *et* t.

Ce cas est ramené à celui du premier problème par les considérations suivantes.

Supposons que la résistance Q^k soit constituée par un poids suspendu à une corde et qu'il s'agit d'élever; qu'un arrêt quelconque empêche la poulie de tourner dans le sens de la chûte du poids Q. Passons la courroie sur la poulie et d'abord ne la tendons que fort peu du côté du brin qui s'enroule; et soit t cette petite tension. Dans cet état de choses, si l'on tire le brin qui se déroule, la courroie glissera sur la poulie qui sera maintenue fixe par le poids Q, tant que la différence $T - t = t(m - 1)$ sera inférieure au poids Q. En augmentant progressivement t, il arrivera un moment où $T - t$ sera égal à Q, et à ce moment il y a équilibre strict.

Deux relations existent ainsi entre T, t et Q :

$$T - t = Q, \qquad T = tm,$$

d'où l'on déduit

$$T = Q \frac{m}{m - 1}, \qquad t = Q \frac{1}{m - 1}.$$

Problème III. — *Calculer l'excès de tension provenant de la vitesse de la courroie.*

En supposant que la courroie embrasse un arc S, pendant qu'un de ses points passe du commencement à la fin de cet arc, sa vitesse $-v$ change de signe, devient $+v$, ou augmente de $2v$ dans un temps que nous nommerons θ. Soient : a^{mq} la section de la courroie ; δ^k le poids du mètre cube de courroie ; $a\delta$ sera le poids du mètre courant et, par suite, le poids dont la vitesse varie de $2v$ dans le temps θ sera $a\delta v\theta$. La force constante capable d'opérer ce changement de vitesse aurait pour intensité

$$\frac{a\delta v\theta}{g} \cdot \frac{2v}{\theta} = 2\frac{a\delta v^2}{g};$$

il est permis de supposer que cet effort supplémentaire est fourni moitié par chaque brin et qu'ainsi la tension effective des brins en marche est

$$T + \frac{a\delta v^2}{g}, \qquad t + \frac{a\delta v^2}{g},$$

ou

$$Q\frac{m}{m-1} + \frac{a\delta v^2}{g}, \qquad Q\frac{1}{m-1} + \frac{a\delta v^2}{g}.$$

Problème IV. — *Calculer la section à donner à une courroie pour que sa tension en marche ne dépasse pas* K *kil. par m. q.*

$$Q\,\frac{m}{m-1} + \frac{a\delta v^2}{g} = a\mathrm{K},$$

d'où

$$a = \frac{Q}{\delta}\,\frac{m}{m-1}\,\frac{1}{\frac{K}{\delta} - \frac{v^2}{g}}. \qquad (a)$$

Problème V. — *Quelle est la vitesse* V *à donner pour que la transmission d'un travail déterminé s'opère avec la courroie la plus légère possible.*

La solution revient à déterminer la valeur de v qui rend a un minimum ; mais il faut préalablement remplacer Q par $75\,\frac{N}{v}$. Nous aurons ainsi

$$a = \frac{75\,N}{\delta}\,\frac{m}{m-1}\,\frac{1}{v\left(\frac{K}{\delta} - \frac{v^2}{g}\right)};$$

le minimum de a correspond à $\frac{K}{\delta} - 3\,\frac{V^2}{g} = 0$,

d'où

$$V = \sqrt{\frac{g}{3}\,\frac{K}{\delta}} = 1{,}808\sqrt{\frac{K}{\delta}}. \qquad (b)$$

Remarques. — Le commerce présente deux genres de courroies en cuir, celles qui sont travaillées à la mesure, celles qui sont travaillées au poids. Pour les premières $\delta = 920$ kil. le mètre cube en moyenne; pour les secondes, 1150. Soit 5^{mm} l'épaisseur de la courroie simple et 10^{mm} celle de la courroie double. On admet en moyenne que la courroie simple peut travailler à raison de $200\,000^{k/mq} = K$; et la courroie double 170 000. Généralement on fait $f = 0{,}28$, de manière que si $\alpha = \pi$, on a à peu près $f\alpha = 1$ et $m = 2{,}72$.

Faisons $N = 1$, A = valeur minima de a correspondant à la valeur (b) de v. Nous aurons, toutes substitutions faites,

$$A^{mq} = \frac{98{,}4}{\delta}\left(\frac{\delta}{K}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad (\delta A)^{k} = 98{,}4\left(\frac{\delta}{K}\right)^{\frac{3}{2}};$$

cette dernière quantité est le poids du mètre courant. Nous pouvons dresser le tableau comparatif ci-dessous relatif à la transmission d'un cheval dans les conditions les plus économiques.

DÉSIGNATION.		Vm par seconde.	$\sqrt{\frac{K}{\delta}}$	$\left(\frac{\delta}{K}\right)^{3/2}$	A centim. carrés.	$(\delta A)^{k}$ par mètre courant	Largeur en millim.
A la mesure	simple.	26,63	14,73	0,000312	0,330	0,0303	6,60
	double.	24,59	13,60	0,000398	0,426	0,0392	4,26
Au poids.	simple.	23,82	13,19	0,000436	0,373	0,0429	7,46
	double.	21,98	12,17	0,000555	0,475	0,0546	4,75

Le même calcul appliqué au câble en fil de fer donne $V = 45^{m},775$ avec $K = 5\,000\,000\,^{k}/_{mq}$. et $\delta = 7800$ k. et on trouve $(\delta A) = 0^{k},0061$. En donnant au câble seulement 20^{m} de vitesse, on trouve $(\delta a) = 0^{k},010$.

NOTE V.

SUR LE CALCUL DES TOURILLONS CYLINDRIQUES SOUMIS A LA FLEXION.

Les dimensions à déterminer sont le diamètre d et la longueur l du tourillon, ou le rapport $K = \frac{l}{d}$.

Les conditions à remplir sont fort complexes. Les unes concernent la résistance que l'on veut obtenir : on exige que la fibre la plus fatiguée à la section dangereuse n'ait pas une tension supérieure à t kil. par m. q. En vertu de l'équation (25) on a donc

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{M}{t}.$$

Et M est le moment maximum. Or, si l'on suppose que la charge donnée P^k se répartit uniformément sur toute la longueur l du tourillon, le moment de flexion maximum aura pour valeur $\frac{1}{2}$ P l ou $\frac{1}{2}$ P K d. D'où résulte

$$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{PKd}{2t}, \qquad \frac{\pi d^2}{16} = \frac{PK}{t}, \qquad (1)$$

première relation entre les inconnues d et K.

Les autres conditions concernent le frottement et son travail et l'échauffement des coussinets. Au moment de la mise en marche d'un tourillon, les surfaces frottantes sont à la température de l'air ambiant. A mesure que le tourillon tourne, il y a du travail qui disparaît, de la chaleur produite qui élève la température du métal ; mais il y a également un écoulement de chaleur du métal à l'air ambiant, écoulement d'autant plus rapide que la température du métal est plus élevée. Par suite de ces conditions, bien qu'il y ait production continue de chaleur, à un certain moment, la température cesse de s'élever ; le *régime* est établi avec cette température maxima : ce phénomène se produit lorsque les quantités de chaleur produite et émise dans un même temps sont égales.

Le coefficient du frottement et, par suite, le travail du frottement, dépendent de cette température du régime ; et celle-ci dépend elle-même de la grandeur de la surface frottante, ou mieux, de la pression Q^k supportée par unité de surface, et de la vitesse de la circonférence extérieure du tourillon, c'est-à-dire de son diamètre et de sa longueur. Ainsi le diamètre et la longueur du tourillon ne doivent pas être trop petits, car

la surface frottante serait trop petite, la pression par m. q. trop grande, la température du régime trop élevée. Par contre le diamètre ne doit pas être trop grand ; car pour un même nombre de tours le travail du frottement, qui constitue une perte, serait trop grand.

Bref, il faut que l'expérience fasse connaître la pression Q^k par m. q. qu'il convient de ne pas dépasser pour une vitesse v donnée de la circonférence extérieure du tourillon. La relation entre Q et v sera la seconde de celles qui sont nécessaires pour la détermination des dimensions l et d.

L'examen d'un grand nombre de tourillons marchant dans des conditions reconnues bonnes en pratique, nous a conduit aux chiffres suivants. Nous n'avons pas la prétention de les présenter comme indiscutables ; mais ils nous serviront à établir une méthode que nous croyons recommandable aux praticiens. Pour une vitesse de $0^m,50$ par seconde, correspondant à $\frac{n_0 \pi d}{60} = 0^m,50$ d'où $n_0 d = 10^m$ environ, on peut élever la pression Q_0 jusque 300000 k. par mètre carré. Pour une vitesse de 5 mètres par seconde, correspondant à $n_1 d = 100$ mètres, la pression Q_1 ne doit pas dépasser 64,000 k. par mètre carré. En résumé, nous admettons

$$Q_0 = 300000 \quad \text{pour } n_0 d = 10,$$
$$Q_1 = 64000 \quad \text{»} \quad n_1 d = 100.$$

Entre ces limites et au-delà, nous posons la *condition que ces quantités varieront comme les coordonnées d'une courbe dont l'axe des* nd *serait une asymptote, et notamment, comme les coordonnées d'une hyperbole.*

L'équation d'une telle hyperbole est

$$Q(nd + A) = B$$

et A et B sont des paramètres que, avec les chiffres que nous proposons, on déterminera par les conditions

$$\left.\begin{array}{l} 300\,000\,(10 + A) = B, \\ 64\,000\,(100 + A) = B, \end{array}\right\} \text{d'où} \quad \begin{array}{l} A = 14{,}49, \\ B = 7\,347\,000\,; \end{array}$$

et

$$Q(nd + 14{,}49) = 7\,347\,000. \qquad (2)$$

Ces données numériques supposent : 1° que la surface qui supporte la pression P est le *sixième* environ de la surface totale $\pi d l = \pi K d^2$ du tourillon, de manière que l'on ait

$$Q = \frac{6}{\pi} \frac{P}{Kd^2} = \frac{3}{2} \frac{1}{\frac{\pi d^2}{4}} \frac{P}{K}\,; \qquad (3)$$

2° Que le graissage est aussi parfait qu'on peut l'obtenir en pratique, c'est-à-dire que la matière lubrifiante n'est pas exprimée par un excès de

pression ; dans ces conditions le coefficient de frottement ne dépend pour ainsi dire que de la matière lubrifiante, et non du métal des coussinets ou du tourillon.

En combinant les équations (1), (2) et (3) on arrive aux suivantes

$$d^4 - \frac{96}{9{,}87\,B}\,\frac{P^2 n}{t}\,d = \frac{96\,A}{9{,}87\,B}\,\frac{P^2}{t};$$

$$d^4 - 0{,}000001324\,\frac{P^2 n}{t}\,d = 0{,}000019183\,\frac{P^2}{t}, \qquad (4)$$

et $$K = \frac{\pi d^2}{4}\,\frac{t}{4P}, \qquad (5)$$

qui renferment la solution de la question. On peut commodément résoudre l'équation (4) par le procédé graphique exposé note II.

Exemples. — Dans les exemples qui suivent, nous ferons $t = 3000\,000$ k. par m. q., de manière que l'équation (4) devient

$$d^4 - 0{,}000\,000\,000\,000\,4413\,P^2 n\,d = 0{,}000\,000\,000\,0063943\,P^2.$$

I. *Données :* $P = 20\,000$, $n = 6$.

On trouve : $d^4 - 0{,}00105912\,d = 0{,}00255772$,

d'où $d = 0^m{,}24$; $K = 1{,}7$; $l = 0^m{,}407$; $Q = 390\,000$; $nd = 1{,}44$; $v = 0{,}0754$.

II. *Données* : $P = 10\,000^k$; $n = 50$. On a

$$d^4 - 0{,}0022065\,d = 0{,}00063943\,;$$

d'où

$d = 0^m{,}18$; $K = 1{,}91$; $l = 0^m{,}344$; $Q = 309000$; $nd = 9$; $v = 0^m{,}471$.

III. *Données* : $P = 1000^k$; $n = 1000$. On a

$$d^4 - 0{,}0004413\,d = 0{,}0000063943\,;$$

d'où

$d = 0^m{,}081$; $K = 3{,}865$; $l = 0^m{,}313$; $Q = 75400$; $nd = 81$; $v = 4^m{,}25$.

IV. *Données* : $P = 150^k$; $n = 2200$. On a

$$d^4 - 0{,}00002184435\,d = 0{,}00000014387175\,;$$

d'où

$d = 0^m{,}03$; $K = 3{,}5$; $l = 0^m{,}105$; $Q = 90927$; $nd = 66$; $v = 3^m{,}912$.

V. *Données* : P 500^k ; $n = 3000$. On a

$$d^4 - 0{,}000330975\,d = 0{,}0000015986\,;$$

d'où

$d = 0^m{,}071$; $K = 5{,}94$; $l = 0^m{,}422$; $Q = 32000$; $nd = 213$; $v = 11^m15$.

TABLE DES MATIÈRES.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR :

Programme du Cours de mécanique appliquée. — 1re partie : CINÉMATIQUE, 1 vol. in-8. . . . . **fr. 8**

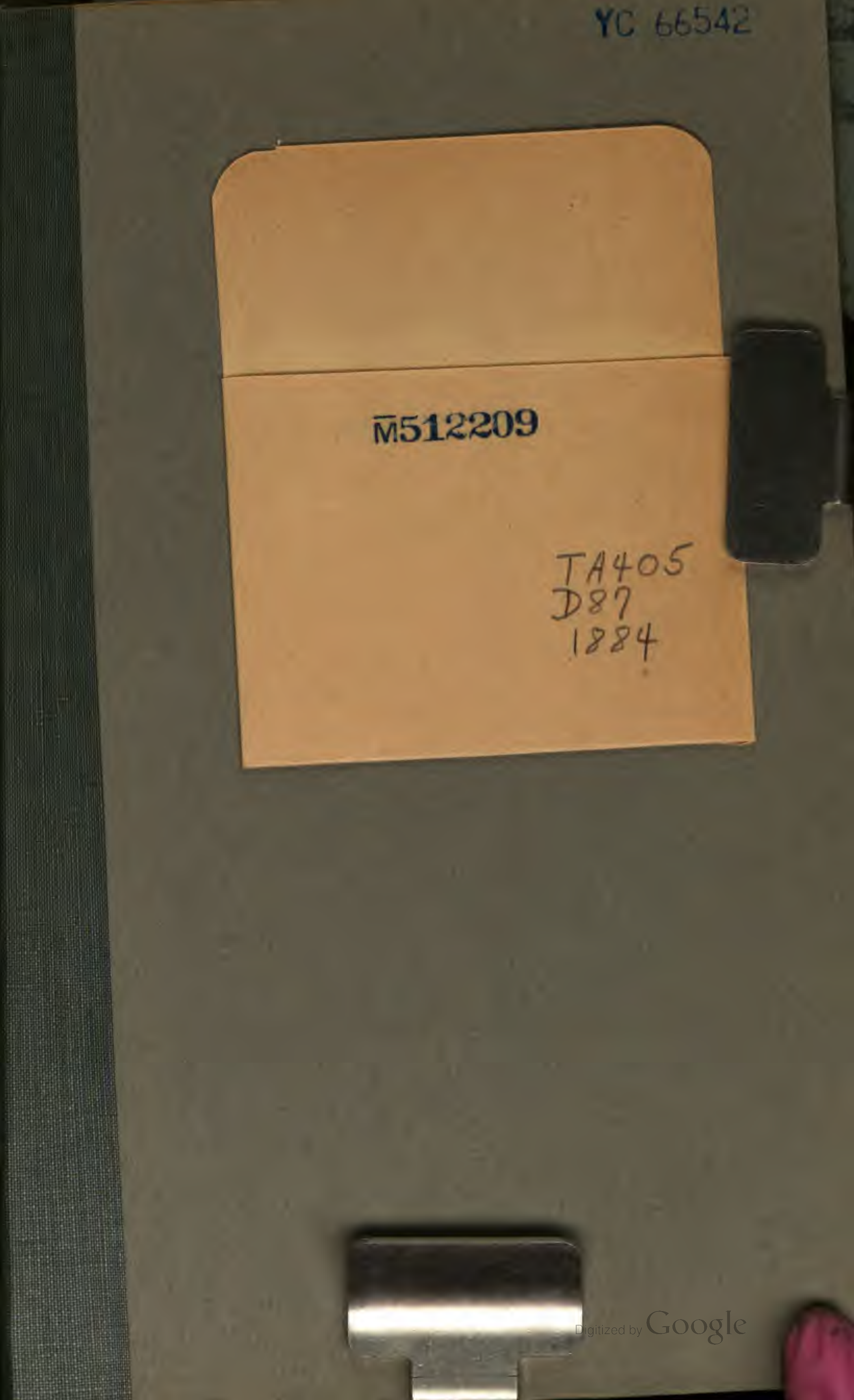
Théorie des moteurs à vapeur, 1 vol. in-8 . . . . . . **fr. 3**

Revue des machines motrices de l'Exposition de Vienne, 1 vol in-8. **fr. 6**

Théorie nouvelle des régulateurs (avec M. CH. BEER), in-8, planche. **fr. 2-50**

Revue des machines thermiques motrices, exposées à Paris en 1878. 1 vol. in-8 . . . . **fr. 3**

Les découvertes récentes concernant la machine à vapeur. 1 vol. in-8 . . . . **fr. 4**



YC 66542
M512209
TA405
D87
1884
Digitized by Google